反復積分とドラム基本群

寺杣友秀

1. 序

多様体の複素係数特異ホモロジーと微分形式からくるドラムコホモロジーはドラム定理によって同型であることが知られている。ホモロジーより精密な不変量であるホモトピーも微分形式を使ってある程度知ることができる。今回はホモトピーのなかでも重要である、基本群について、考察したい。

ドラムの定理に現れる同型は微分形式と位相的なサイクルの積分で表されるが、基本群に関して考えると反復積分が現れる。ドラムホモトピー理論の概要をざっと述べることにしよう。

2. 多様体上の接続と可積分性

2.1. Frobenius の可積分条件.

2.1.1. U を $\mathbf{R}^n$ の開集合とする。$\mathbf{R}^n$ の座標を $x=(x_1,\dots,x_n)$ とし, $A_1=A_1(x),\dots,A_n=A_n(x)$ を U 上の C^∞-$(k\times k)$-行列値関数とする。U 上の未知ベクトル値関数 $v={}^t(v_1(x),\dots,v_k(x))$ に関する連立微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial x_i}v=A_iv \tag{2.1}$$

等式 $\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}v(x)=\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i}v(x)$ がなりたたなくてはならないので、この連立微分方程式が解をもつためには

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j}+A_iA_j=\frac{\partial A_j}{\partial x_i}+A_jA_i$$

がなりたたねばならず、これは $k\times k$-行列値一次微分形式

$$\omega=A_1dx_1+\cdots+A_ndx_n$$

を用いれば、

$$\omega\wedge\omega-d\omega=0 \tag{2.2}$$

と表される。この条件を Frobenius の可積分条件という。

定理 2.1. 上の微分方程式は局所的に k-次元の独立解をもつ。またこれは基点による初期値によって一意的に定まる。

この形を使えば、座標のとり方に依存しない形に定式化できるので、多様体の上で微分方程式を考えることができる。

2.1.2. X を多様体とする。$A^i(X)$ で X の i-次微分形式の空間とする。$A^i(\mathbf{C}^k) = A^i(X) \otimes \mathbf{C}^k$ を k-次元ベクトル値の i-次微分形式の空間とする。さらに ω を $k \times k$-値 1-形式として

$$\nabla : A^0(\mathbf{C}^k) \to A^1(\mathbf{C}^k) : v \mapsto dv - \omega \cdot v \tag{2.3}$$

とおく。このとき $f \in A^0(X)$, $v \in A^0(\mathbf{C}^k)$ に対して、

$$\nabla(fv) = df \cdot v + f\nabla(v) \tag{2.4}$$

が成立する。(2.3) のような写像で条件 (2.4) を満たすものを X 上の接続という。さらに条件 (2.2) は合成写像

$$A^0(\mathbf{C}^k) \xrightarrow{\nabla} A^1(\mathbf{C}^k) \xrightarrow{\mu(1\otimes\nabla)+d\otimes 1} A^2(\mathbf{C}^k) \tag{2.5}$$

が 0 写像となる事と同値となる。この条件が満たされるとき、可積分接続といわれる。

2.1.3. 一般に $\mathcal{L}$ を $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間として、$A^i(\mathcal{L}) = A^i(X) \otimes \mathcal{L}$ とおく。このとき写像

$$\nabla : A^0(\mathcal{L}) \to A^1(\mathcal{L})$$

が条件 (2.4) を満たすとき、ペア $(\mathcal{L}, \nabla)$ を接続という。さらに合成 (2.5) が 0 写像となるとき、可積分接続といわれる。$\dim(\mathcal{L})$ を接続の階数という。

2.1.4. 二つの接続 $(\mathcal{L}_1, \nabla_1)$, $(\mathcal{L}_2, \nabla_2)$ が与えられたとき、その直和が考えられるが、ライプニッツルール

$$A^0(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \to A^1(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) : \nabla(f_1 \otimes f_2) = \nabla_1(f_1) \otimes f_2 + f_1 \otimes \nabla_2(f_2)$$

によりテンソル積も定義される。さらに線形写像 $Hom(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ も

$$\theta \mapsto \big[f_1 \mapsto \nabla_2(\theta(f_1)) - (1 \otimes \theta)(\nabla_1(f_1))\big]$$

によって

$$A^0(Hom(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)) \to A^1(Hom(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2))$$

を定めると接続となる。これを内部射という。さらに可積分接続は直和、テンソル積、内部射について閉じている。

2.2. **接続とモノドロミー.**

X を多様体 $(\mathcal{L}, \nabla)$ を階数 k の可積分接続とする。$x \in X$ として U を x を含む単連結な開集合とする。$\nabla(v) = 0$ の U での局所的な解で独立なものを $v_1, \dots, v_k$ とする。さらにを x をを始点、終点とする X の道とする。$v_1, \dots, v_k$ を定理 2.1 の性質によって道 γ に沿って接続してゆき、x の回りでの解 $v_1(\gamma), \dots, v_k(\gamma)$ が得られたとすると

$$(v_1(\gamma), \dots, v_k(\gamma)) = (v_1, \dots, v_k)\rho(\gamma)$$

となる $\rho(\gamma) \in GL(\mathcal{L})$ が得られる。γ の後に δ をつなげたものを $\delta\gamma$ と書くと $\rho(\delta)\rho(\gamma) = \rho(\delta\gamma)$ となる。さらに γ と γ' がホモトピックであれば $\rho(\gamma) = \rho(\gamma')$ なので

$$\pi_1(X, x) \to GL(\mathcal{L})$$

なる群の有限次元表現がえられる。これをモノドロミー表現という。基本群の有限次元表現の全体は直和、テンソル積について閉じている。

2.3. **基本群の表現の圏、接続の圏.** 様々な現象を圏の言葉で表すことは、現代数学のひとつの特徴といってよいだろう。圏は対象と射からなる。一番基本的なものとして集合を対象として、写像を射とする圏でこれは集合の圏と言われる。そのほか、可微分多様体を対象として、可微分写像を射とする圏、線形空間を対象として、線形写像を射とする圏などがある。

圏の公理のすべては書かないが、射の条件の一つとして合成について閉じていることが課せられている。

定義 2.2 (接続の射)**.** $k_1, k_2 \leq 0$ として $(\mathcal{L}_1, \nabla_1), (\mathcal{L}_2, \nabla_2)$ を階数 k_1, k_2 の可積分接続とする。$f = (f_{ij})$ を $k_2 \times k_1$-行列値の C^∞ 関数とする。

$$(1 \otimes f)(\nabla_1(v)) = \nabla_2(f(v))$$

が成り立つとき、f は接続写像といい $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ と書く。X 上の可積分接続を対象として接続写像を射として圏が定義される。これを X 上の可積分接続の圏という。

圏のことばを使うときに有効な概念に関手がある。これは二つの圏を比較するときに用いる手段である。圏とみて「同じ」と「みなしてよい」ものを圏の同値という。「基本群の表現の圏」と「可積分接続の圏」は関手や、同値のよい例であるので、事実を証明なしに (同値の正確な定義もなしに) 述べることにしよう。

補題 2.3. (1) $(\mathcal{L}_1, \nabla_1), (\mathcal{L}_2, \nabla_2)$ を階数 k_1, k_2 の可積分接続とし、$(\mathcal{L}_1, \rho_1), (\mathcal{L}_2, \rho_2)$ をそれぞれのモノドロミー表現とする。$f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ を接続写像とすると、モノドロミー表現としての準同型写像 $M(f) : (\mathcal{L}_1, \rho_1) \to (\mathcal{L}_2, \rho_2)$ が得られる。
(2) モノドロミー写像のなす線形空間と基本群の表現としての準同型写像のなす線形空間は上の対応により同型となる。
(3) 基本群の表現 $(\mathcal{L}, \rho)$ が与えられるとこれをモノドロミー表現とするような可積分接続が存在する。

上の状況 (1) を「可積分接続の圏」から「基本群の表現の圏」への関手が構成されたという。(2) と (3) をもって二つの圏は同値である、と言われる。

3. 冪零接続、反復積分

定義 3.1 (冪零接続)**.** $(\mathcal{L}, \nabla)$ を接続とする。$\mathcal{L}$ に部分接続の有限列（フィルトレーションという）

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 \supset \mathcal{L}^1 \supset \cdots \supset \mathcal{L}^{p+1} = 0$$

が存在して $\nabla(A^0(\mathcal{L}^i)) \subset A^1(\mathcal{L}^{i+1})$ が成り立つとき、このフィルトレーションを冪零フィルトレーションという。冪零フィルトレーションをもつ接続を冪零接続という。

$(\mathcal{L}, \nabla)$ を冪零接続として $\mathcal{L} = \oplus_{i=0}^p V^i$ を冪零フィルとレーションと協調的な直和分解とする。すなわち

$$\mathcal{L}^j = \oplus_{i=j}^p V^i$$

となるとする。V^i と協調的な基底をとれば、

$$\nabla = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ \omega_{p1} & \omega_{p2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

で $\omega_{ij} \in A^1 \otimes Hom(V_j, V_i)$ である。

3.1. **反復積分.** 道 $\gamma : [0,1] \to X$ をとる。$\omega_1, \omega_2, \dots$ に対して反復積分を

$$\int_\gamma \omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_n = \int_{0 \le t_n \le \cdots \le t_1 \le 1} pr_1^* \gamma^*(\omega_1) \wedge pr_2^* \gamma^*(\omega_2) \wedge \cdots \wedge pr_n^* \gamma^*(\omega_n)$$

と定義する。γ を $[0,x]$ に制限した道を $\gamma(x)$ とおくと $\int_{\gamma(x)} \omega_1 \cdots \omega_n$ は x に関する関数となる。このとき

$$d(\int_{\gamma(x)} \omega_1 \cdots \omega_n) = \omega_1 \cdot \int_{\gamma(x)} \omega_2 \cdots \omega_n$$

$\omega_1, \dots, \omega_n \in M(k, \mathbf{C}) \otimes A^1$ に対しても $M(k, \mathbf{C})$ での積をもちいて

$$\int_\gamma \omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_n \in M(k, \mathbf{C})$$

が同様に定義される。ω が冪零接続を定義しているとすると、

$$\int_\gamma \underbrace{\omega \cdot \omega \cdots \omega}_{n} \in M(k, \mathbf{C})$$

は十分大きな n に対して 0 になる。

命題 3.2. (1) ω が可積分条件 $\omega \wedge \omega + d\omega = 0$ を満たしていて、冪零接続を定めているとする。x_0 を基点とする。$x \in X$ として γ を x_0 と x を結ぶ道とする。このとき

$$\exp \int_\gamma \omega = 1 + \int_\gamma \omega + \int_\gamma \omega\omega + \int_\gamma \omega\omega\omega + \cdots$$

は有限和で γ のホモトピーのみによる。これは局所的に x の関数とみなせば、

$$d(\exp \int_\gamma \omega) = \omega \cdot \exp \int_\gamma \omega$$

となる。従って $\exp \int_\gamma \omega$ は方程式 *(2.1)* の基本解となる。

(2) さらに $\gamma \in \pi_1(X, x)$ とすると、$\exp \int_\gamma \omega \in GL(k, \mathbf{C})$ となり

$$\exp \int_\delta \omega \cdot \exp \int_\gamma \omega = \exp \int_{\delta\gamma} \omega.$$

これは ω によって定まる可積分接続のモノドロミー表現に他ならない。

3.2. **冪単完備化.**

3.2.1. 上の様にして定まる基本群の表現は冪単表現となる。一般に群 G が与えられたとき、冪単表現全体のなす圏はある代数群（の射影極限）$\widehat{G}$ の表現の圏と同値になる事が知られている。この $\widehat{G}$ は G の冪単完備化（マルツェフ完備化）と呼ばれている。$\widehat{G}$ の構成法を述べよう。G の $\mathbf{C}$ 上の群環 $A = \mathbf{C}[G]$ を考え左作用により G の表現と見る。I を $(g-1)$ $(g \in G)$ で生成される両側イデアルとする。I^m をイデアル I の m 上とすると、A/I^m は m に関する射影系となる。その射影極限を $\widehat{A}$ とかく。これは G の表現となる。

$$G \to Aut(\widehat{A})$$

の Zariski 閉包（この集合を含む最小の代数多様体）が $\widehat{G}$ である。

3.2.2. $\widehat{G}$ は余積と呼ばれる環準同型写像

$$\Delta : \widehat{A} \to \widehat{A}\widehat{\otimes}\widehat{A}$$

から復元される。Δ は $\Delta(g) = g \otimes g$ によって特徴つけされる連続写像で、$\widehat{G}$ は

$$\widehat{G} = \{g \in \widehat{A} \mid g \equiv 1 \bmod I, \Delta(g) = g \otimes g\}$$

となる。

4. ドラム基本群

4.1. **普遍的冪零接続.** 冪単な基本群の表現はモノドロミー関手を通して、可積分冪零接続と対応する。このことから基本群の冪単完備化が微分形式の微分次数環 $A^\bullet(X)$ から復元されることが、予想されるだろう。実際に $\widehat{A}$ と Δ が微分形式の微分次数環から計算される。これをドラム基本群という。

普遍的な可積分冪零接続を構成してみよう。まず $A^1(X) = dA^0 \oplus K$ なる直和分解を一つ固定しておく。$A'^0 = \mathbf{C}, A'^1 = K, A'^k = A^k(X)$ と置くと $A'(X)$ は $A(X)$ の部分微分次数環で $A^\bullet(X)$ と $A'^\bullet(X)$ のホモロジーは等しくなる。$A'^\bullet(X)$ の有限次元の部分微分次数環 $E^\bullet$ を考える。

まず係数が E に入る接続のなかで普遍的な冪零接続 M を考える。それは

$$M = \mathbf{C} \oplus E^1 \oplus (E^1 \otimes E^1) \oplus (E^1 \otimes E^1 \otimes E^1) \oplus \cdots \tag{4.1}$$

で $\nabla : M \to E^1 \otimes M$ は成分を一つづつずらしていくものとして定める。$E^1 \otimes M \subset A^1 \otimes M$ を合成することにより冪零接続が得られる。次に可積分となる最大の部分接続 $B(E^\bullet)$ を求めよう。以下 M に現れるテンソル積を

$$E^1 \otimes E^1 \otimes \cdots \otimes E^1 = [E^1 \mid E^1 \mid \cdots \mid E^1]$$

などと書くことにすると見やすい。

まず条件 (2.2) から $B(E^\bullet)$ は合成写像

$$\varphi_0 : M \xrightarrow{\nabla} E^1 \otimes M \xrightarrow{\mu(1\otimes\nabla)+d\otimes 1} E^2 \otimes M$$

の核に含まれなくてはならない。$L_0 = Ker(\varphi_0)$ とおく。さらに $\nabla^{-1}(E^1 \otimes L_0)$ にも含まれてなくてはならないので、$L_1 = L_0 \cap \nabla^{-1}(E^1 \otimes L_0)$ とおく。こうするとさらに条件はきつくなり、

$$L_k = L_{k-1} \cap \nabla^{-1}(E^1 \otimes L_{k-1})$$

と定めていき $L_\infty = \cap_k L_k$ とおけば

$$L_\infty \to E^1 \otimes L_\infty$$

なる可積分冪零接続を得る。このとき帰納法で次のことがわかる。

$$L_0 = \mathrm{Ker}(\oplus_{k\geq 0}\underbrace{[E^1 \mid \cdots \mid E^1]}_{k} \to \oplus_{k\geq 1}\underbrace{[E^2 \mid E^1 \mid \cdots \mid E^1]}_{k})$$

$$L_1 = \mathrm{Ker}(\oplus_{k\geq 0}\underbrace{[E^1 \mid \cdots \mid E^1]}_{k} \to \oplus_{k\geq 1}\underbrace{[E^2 \mid E^1 \mid \cdots \mid E^1]}_{k} \oplus \oplus_{k\geq 2}\underbrace{[E^1 \mid E^2 \mid E^1 \cdots \mid E^1]}_{k})$$

$$\cdots$$

$$L_\infty = \mathrm{Ker}(\oplus_{k\geq 0}\underbrace{[E^1 \mid \cdots \mid E^1]}_{k} \to \oplus_{p\geq 0, q\geq 0}\ \underbrace{[E^1 \mid \cdots \mid E^1}_{p} \mid E^2 \mid \underbrace{E^1 \mid \cdots \mid E^1]}_{q})$$

L_∞ の右辺に出てくる写像は bar 複体と呼ばれるものの一部分となっている。$L_\infty = B(E^\bullet)$ とおくと (有限次元にするには長さを有限におさえておく必要があるが、) これは可積分冪零接続である。ここで E を有限次元で大きくしていったときの帰納極限を

$$B(A'^\bullet) = \lim_{\substack{\to \\ E^\bullet}}\ B(E^\bullet)$$

とおき

$$\widehat{A}_{dR} = Hom_{\mathbf{C}}(B(A'^\bullet), \mathbf{C})$$

とおく。$\exp\int_\gamma \in Aut(B(A'^\bullet))$ の定義から

$$\big(\exp\int_\gamma\big)([\omega_1 \mid \cdots \mid \omega_k]) = \sum_p \big(\int_\gamma \omega_1 \cdots \omega_p\big)[\omega_{p+1} \mid \cdots \mid \omega_k]$$

となる。従って

$$\int_\gamma : B(A'^\bullet) \to \mathbf{C} : \sum_i [\omega_1^{(i)} \mid \cdots \mid \omega_{k_i}^{(i)}] \mapsto \sum_i \int_\gamma \omega_1^{(i)} \mid \cdots \mid \omega_{k_i}^{(i)} \tag{4.2}$$

なる写像を考えると $\gamma \mapsto \int_\gamma$ なる写像は γ のホモトピー類にのみよる。これから

$$\widehat{A} \to \widehat{A}_{dR} \tag{4.3}$$

なる写像が誘導されることがわかる。最後にドラム基本群に関する基本定理を述べる。

定理 4.1. 写像 *(4.3)* は $\widehat{G}$ の表現の写像となり、同型になる。また $\widehat{A}_{dR}$ 上の余積 Δ_{dR} も微分形式の言葉でかける。

4.2. **余加群とシャッフル積.**

4.2.1. 定理 4.3 の Δ_{dR} は $B(A'^{\bullet})$ の積構造

$$\coprod : B(A'^{\bullet}) \otimes B(A'^{\bullet}) \to B(A'^{\bullet})$$

から誘導される。この積はシャッフル積と呼ばれる。これを構成する前に、$B(A'^{\bullet})$ の余積

$$B(A'^{\bullet}) \to B(A'^{\bullet}) \otimes B(A'^{\bullet})$$

について述べたい。

(N, ∇_N) を

$$\nabla_N : N \to E^1 \otimes N$$

なる形で与えられている可積分冪零接続とする。この操作を繰り返すことにより、

$$\nabla_N^k : N \to \underbrace{[E^1 \mid \cdots \mid E^1]}_{k} \otimes N$$

これから (4.1) の M を用いて

$$\exp(\nabla_N) = \sum_{i \geq 0} \nabla_N^i : N \to M \otimes N$$

なる写像を得る。

命題 4.2. $\exp(\nabla_N)$ の像は $B(E^{\bullet})$ に含まれる。さらに $E^{\bullet} \subset A'^{\bullet}$ に関する帰納極限をとり、

$$\exp(\nabla_N) = \sum_{i \geq 0} \nabla_N^i : N \to B(A'^{\bullet}) \otimes N$$

なる写像が得られる。さらに γ に沿った *(4.2)* の反復積分写像 $\int_{\gamma}$ を合成すると、N のモノドロミー表現が得られる。

上の命題を $B(A'^{\bullet})$ に対して適用することにより、

$$\Delta_B = \exp(\nabla_N) : B(A'^{\bullet}) \to B(A'^{\bullet}) \otimes B(A'^{\bullet})$$

なる写像が得られる。これを $B(A'^{\bullet})$ の余積という。$M \to \mathbf{C}$ を射影としてこれから導かれる写像 $u : B(A'^{\bullet}) \to \mathbf{C}$ を余単元という。

定義 4.3 (余加群)**.** ベクトル空間 N と写像 $\Delta_N : N \to B(A'^{\bullet}) \otimes N$ のペア (N, Δ_N) が余加群であるとは

(1) 余結合法則をみたし、
(2) 余単位元との合成が恒等写像

となることである。

命題 4.4. $A'^{\bullet}$ に係数をもつ可積分冪零接続の圏と $B(A'^{\bullet})$-余可群の圏は同値である。

4.2.2. 以上の準備のもとでシャッフル積を定義しよう。まず $B(A'^{\bullet})$ は $A'^{\bullet}$ に値をもつ可積分冪零接続なので $B(A'^{\bullet}) \otimes B(A'^{\bullet})$ も可積分冪零接続となる。これに対応する $B(A'^{\bullet})$-余加群構造を

$$B(A'^{\bullet}) \otimes B(A'^{\bullet}) \to B(A'^{\bullet}) \otimes \left[B(A'^{\bullet}) \otimes B(A'^{\bullet})\right]$$

とおく。さらに $u \otimes u : B(A'^{\bullet}) \otimes B(A'^{\bullet}) \to \mathbf{C}$ より誘導される写像

$$B(A'^{\bullet}) \otimes \left[B(A'^{\bullet}) \otimes B(A'^{\bullet})\right] \to B(A'^{\bullet})$$

を合成することにより、シャッフル積

$$B(A'^{\bullet}) \otimes B(A'^{\bullet}) \to B(A'^{\bullet})$$

が定義される。これから $\widehat{A}_{dR}$ の余積 $\widehat{A}_{dR} \to \widehat{A}_{dR} \widehat{\otimes} \widehat{A}_{dR}$ が導かれる。

4.2.3. シャッフル積の具体形は次のようになる。$[\omega_1 \mid \cdots \mid \omega_k], [\omega_{k+1} \mid \cdots \mid \omega_{k+l}] \in B(A'^{\bullet})$ とするとき

$$[\omega_1 \mid \cdots \mid \omega_k] \coprod [\omega_{k+1} \mid \cdots \mid \omega_{k+l}] = \sum_{\sigma \in S_{k,l}} [\omega_{\sigma(1)} \mid \cdots \mid \omega_{\sigma(k+l)}]$$

となる。ここで $S_{k,l}$ はシャッフルの集合で

$$\begin{aligned} S_{k,l} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l} \mid \sigma(a) < \sigma(b) \text{ for } 1 \le a < b \le k, \\ \sigma(a) < \sigma(b) \text{ for } k+1 \le a < b \le k+l\} \end{aligned}$$

で定義されるものである。

4.3. **応用.** ドラム基本群は多重対数関数や多重ゼータ値に応用される。この観点から多重対数関数の楕円曲線上のドラム基本群での類似物が考えられ、これは楕円多重対数関数と呼ばれる。