リーマン・ロッホの定理

寺杣友秀

X を複素数体上の代数多様体を考える。X のベクトル束 E の位相的不変量としてチャーン類が定まる。一方 E の切断、もう少し一般的に E を係数とする層係数コホモロジー $H^i(X,E)$ の次元の交代和を考えることにより、E の解析的不変量が定まる。この二つの関係式を与えるのがリーマン・ロッホの定理である。近年ではこの高次版ともいえる、高次 K 群に関するリーマン・ロッホの定理が知られており、数論幾何的不変量との関係が研究されている。

1. 代数曲線

有限個の方程式で定義された $\mathbf{C}^n$ の部分集合を代数的集合という。代数多様体とは、このような集合を代数的な仕方で貼り合わせて、適切な仕方で位相を入れたものである。例えば、位相空間としてコンパクトであるという性質や、非特異といった性質も定義されていて、非特異の時には複素多様体になっている。

代数多様体には次元が定義されていて、1 次元の代数多様体は代数曲線と呼ばれる。代数曲線は非特異であれば、複素次元が 1 次元の複素多様体となる。1 次元の複素多様体はリーマン面と呼ばれるが、コンパクト・リーマン面は必ず代数曲線になることが知られている。ここで非特異でコンパクトな代数曲線に関して、その上の有理関数やその零点、極について、平面曲線を例として述べることにしよう。

平面曲線は代数曲線の例としては、比較的単純なものではあるが、代数曲線の性質を考察し、推測する上では有効である。まず 2 次元射影平面 $\mathbf{P}^2$ を

$$\{(X:Y:Z) \mid X,Y,X \in \mathbf{C}, (X,Y,Z) \neq (0,0,0)\}$$

と定義する。ここで $(X:Y:Z)$ は連比とよばれ、$\lambda \in \mathbf{C}-\{0\}$ とするとき、$(X:Y:Z)$ と $(\lambda X:\lambda Y:\lambda Z)$ は同一視するものと約束する。$\mathbf{P}^2$ には $\mathbf{C}^3-\{0\}$ の商空間としての位相を考えることができる。

いま $F(X,Y,Z)$ を 3 変数の次数が d の斉次多項式とする。このとき $\mathbf{P}^2$ の部分集合

$$V(F) = \{(X:Y:Z) \mid F(X,Y,Z) = 0\}$$

は F の同次性を用いて、矛盾なく定義されることがわかる。いま F は既約多項式であると仮定しよう。例えば

$$F(X,Y,Z) = X^d + Y^d + Z^d \tag{1.1}$$

とするとき、$V(F)$ は非特異であることが、陰関数の定理を用いることによってわかる。これは $\mathbf{C}^2$ 内の代数的集合を貼り合わせて得られていることが次の様にしてわかる。

まず $\mathbf{P}^2$ の部分集合 U_X, U_Y, U_Z をそれぞれ $X \neq 0, Y \neq 0$ および $Z \neq 0$ で定まる開集合とする。そのとき

$$U_Z \to \mathbf{C}^2 : (X,Y,Z) \mapsto (x,y) = (\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z})$$

が同相写像を与える。このとき (x,y) を非斉次座標とよぶ。また、

$$\mathbf{P}^2 = U_X \cup U_Y \cup U_Z$$

と $\mathbf{P}^2$ は開被覆される。

この同一視の下で、$Z = 0$ でなければ、$F(X,Y,Z) = Z^d F(x,y,1)$ なので、$V(F) \cap U_Z$ は

$$\{(x,y) \mid F(x,y,1) = 0\}$$

と同一視される事がわかる。例にあげた F で考えれば、$V(F) \cap U_Z$ は

$$\{(x,y) \mid x^d + y^d + 1 = 0\} \tag{1.2}$$

となる。開集合 U_Z を U_X, U_Y に取り換えても同様に考えることができ、$V(F) \cap U_Z$ や $V(F) \cap U_Z$ が $\mathbf{C}^2$ の代数的集合を”貼り合わせる”ことにより $V(F)$ が得られている事がわかる。

2. 種数

平面曲線の位相的性質を述べることにしよう。いま $F(X,X,Z)$ は (1.1) で与えられるものとしよう。$C = V(F)$ として $C_Z = U_Z \cap C$ として $\pi : C_Z \to \mathbf{C}$ を

$$\pi : C_Z \to \mathbf{C} : (x,y) \mapsto x$$

によって定義する。このとき集合 (1.2) の中に出てくる方程式を考えれば、全射であって、

$$\pi^{-1}(x) = \begin{cases} d \text{ 元集合} & (x^d + 1 \neq 0) \\ 1 \text{ 元集合} & (x^d + 1 = 0) \end{cases}$$

また $C_X = U_X \cap C$ とおくと、C は C_X と C_Z で被覆される。C_X の方程式を斉次座標 $(y', z') = (\frac{Y}{X}, \frac{Z}{X})$ で書くと、

$$1 + {y'}^d + {z'}^d = 0$$

で与えられる。そこで、$\pi' : C_X \to \mathbf{C}$ を

$$\pi' : C_X \to \mathbf{C} : (y', z') \mapsto z'$$

によって与えれば、$x = \dfrac{X}{Z}$ で $z' = \dfrac{Z}{X}$ となることから、π と π' は貼り合わさって、C から射影直線 $\mathbf{P}^1$ への写像を定義する事がわかる。π の像となっていない $\mathbf{P}^1$ の点は $z' = 0$ のところだけなので、そこでの逆像を求めてみると、

$${\pi'}^{-1}(0) = d \text{ 元集合}$$

となる。

さて、ここでリーマン面が向き付け可能な閉曲面であるという事実を用いて、その種数 $g = g(C)$ を求めてみる。オイラー数は $2-2g$ となるのでリーマン面の種数 g を求めるにはオイラー数 $\chi(C)$ を計算すればよい。

$$\begin{aligned}\chi(C) =& d\chi(\mathbf{C} - d \text{ 点集合}) + d + d \\ =& d(1-d) + 2d = -d^2 + 3d\end{aligned}$$

よって

$$2g = d^2 - 3d + 2 = (d-1)(d-2), \quad g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

となる。d 次曲線はすべて上の形の C から位相的に自明な変形を施すことにより得られていることと、オイラー数が位相的不変量であることから、非特異な d 次平面曲線の種数は上の式で与えられる事がわかる。

3. 曲線上の正則関数、有理関数

代数多様体についてはその上の有理関数というものが定義される。上の $F(X,Y,Z) = 0$ で定まる平面曲線 $C = V(F)$ の場合には

$$\varphi = \frac{f(X,Y,Z)}{g(X,Y,Z)}$$

であらわされる関数である。ここで f, g の $(X:Y:Z)$ での値が定まるように f, g は同じ次数の斉次多項式でなくてはならず、また $g(X,Y,Z)$ が C 上で常に 0 とはならないように F で割り切れないとする。また f が F で割り切れれば、φ は C 上の関数として 0 となるので、射影平面上の有理式としての表示を F で生成されるイデアルによる同値類で考えることになる。

このような曲線上の点 p と曲線上の有理関数 φ が与えられたときに φ の p における位数が定まる。これは φ を p における一意化元 u（局所座標で p において 0 になるもの）を用いて

$$\varphi = a_m u^m + a_{m+1} u^{m+1} + a_{m+2} u^{m+2} + \cdots$$

とローラン展開したときの m の値である。m が負の数であるとき p において位数 $\mid m \mid$ 位の極をもつという。例えばすべての $p \in C$ においてその位数が 0 以上であれば φ は C 上の正則関数なので C がコンパクトであることを用いれば、リュービルの定理により φ は定数関数となる。

もう少し条件をゆるくして、点 $p_1, \ldots, p_k$ を与えたときに C 上の有理関数で

(1) $S = \{p_1, \ldots, p_k\}$ において $p_1, \ldots, p_k$ において高々1 位の極を持ち、
(2) $C - S$ では正則である

ものはどれくらいあるだろうか。実は上の条件を満たす有理関数は有限次元のベクトル空間をなすことが知られている。これを $L(S)$ と書くことにする。

この問題を C が非特異な平面曲線 $V(F)$ の場合について考えてみよう。実際に集合 $S = \{p_1, \ldots, p_k\}$ が与えられたときに上の $L(S)$ を求める問題は後で述べるように、少し難しい点がある。特殊な場合ではあるが $m > d$ なる m および、m 次斉次式 $h(X,Y,Z)$ とってきて、$S = V(h) \cap V(F)$ と表されている場合について考えてみることにしよう。ただし $V(h)$ と $V(F)$ は重複度が 1 で交わっているとする。このとき Bézout の定理から $\#S = md$ である。

このとき h の零点は分母に許してよいので、

$$L(S) = \{\frac{f(X,Y,Z)}{h(X,Y,Z)} \mid f \text{ は } m \text{ 次斉次多項式}\}$$

の形に書けることがわかる。したがって $L(S)$ は

$$\mathrm{coker}(\mathbf{C}[X,Y,Z]_{m-d} \to \mathbf{C}[X,Y,Z]_m : a(X,Y,Z) \mapsto a(X,Y,Z)F(X,Y,Z))$$

となる。ここで $\mathbf{C}[X,Y,Z]_m$ は $\mathbf{C}[X,Y,Z]$ の m 次斉次部分空間である。したがって

$$\begin{aligned}\dim L(S) &= \binom{m+2}{2} - \binom{m-d+2}{2} \\ &= \frac{(m+2)(m+1)}{2} - \frac{(m+2-d)(m+1-d)}{2} \\ &= md - \frac{(d-2)(d-1)}{2} + 1 \\ &= \#S - g(C) + 1\end{aligned}$$

ここで $\dim L(S)$ は解析的な不変量で $\#S - g(C) + 1$ は位相的な不変量であることを考えれば、解析的な不変量を位相的な不変量で表す公式が得られたことになる。これがリーマン・ロッホの定理の一番簡単な場合である。この公式において、S に属する点の個数が小さいときは補正項が必要となり、それを述べるには層係数コホモロジー理論が必要である。$L(S)$ の方も層係数コホモロジーの次元の交代和で補正するのである。

4. 高次元のリーマン・ロッホの定理

リーマン面は 1 次元の代数多様体としてとらえられる。高次元の代数多様体についても正則関数の極や零因子（=関数が 0 となる集合のこと）を考えることができる。これを用いて X 上のある条件をもった有理関数の空間やその次元を考えることができる。高次元の場合、こういったものを考えるよりももう少し一般化してベクトル束の切断を考えた方が統一的にとらえられる。またベクトル束の切断単独では一般的に成り立つきれいな関係式は得られず、E を係数とする層係数コホモロジー $H^i(X,E)$ が必要になってくる。層係数コホモロジーに関しては曲線の時と同じく $H^i(X,E)$ は有限次元であることが知られている。

リーマン・ロッホの定理を定式化する目的でベクトル束の K 群というものが考えられた。K 群はベクトル束の同型類 $[E]$ を生成元として

$$0 \to E \to F \to G \to 0$$

なる完全列があるときに関係式 $[E]+[G]=[F]$ を考えることにより定義される加群である。ヒルゼブルフにより高次元の時に一般化され、グロタンディークにより、さらに一般化されたリーマン・ロッホの定理は、解析的不変量である

$$\chi(X,E) = \sum_i (-1)^i \dim H^i(X,E)$$

を E の位相的不変量であるチャーン類 $c_i(E)$、チャーン指標 $ch(E)$、X の位相不変量であるトッド類 Td_X を用いて表す公式である。これらを述べるには X

上のホモロジーあるいは、代数的サイクルおける交叉理論が必要である。ここに現れるチャーン類は、さまざまなコホモロジー理論上で定義することができ、ホッジ理論と関連の深い、ドゥリーニュ・コホモロジーで考えることもできる。高次 K 群に対してして定義されたドゥリーニュ・コホモロジーに値をもつチャーン類は単数基準写像といわれ、代数多様体のゼータ関数の特殊値と深く関連していることが予想されている。