

代数 III 演習問題

2015 年 1 月 6 日 担当：寺杉友秀

66. 局所環 $R = \mathbf{Q}[[x, y]]$ として M を R の極大イデアルとする。
- (1) イデアル M の生成系を求めよ。
 - (2) 「 $l(\mathbf{R}/I) = 3$ となるような R のイデアル I は $M^n \subset I$ となる」が成り立つ様な正の自然数 n は存在するか？もし存在すれば、そのような n のうちの最小を求めよ。
67. $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ を係数とする 2 次の正方行列のなす環 $M(2, \mathbf{Z}/9\mathbf{Z})$ のヤコブソン根基を求めよ。
68. $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/9\mathbf{Z} = M_1 \oplus M_2$ が \mathbf{Z} -加群の直既約分解となるような部分加群のペア M_1, M_2 をすべて求めよ。ただし $M_1 \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}, M_2 \simeq \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ とする。
69. 次の問いに答えよ。
- (1) $M = \mathbf{Q}[x]/(x^2 - 2)$ の $\mathbf{Q}[x]$ 加群としての長さをもとめよ。
 - (2) $\mathbf{Q}[x]$ -加群 $M \otimes_{\mathbf{Q}[x]} M$ の長さを求めよ。
70. $R = \mathbf{C}[x]$ とし、 $f(x), g(x)$ を 0 でない R の元とする。 R 加群 $M_1 = \mathbf{C}[x]/f(x)$ の長さを a , $M_2 = \mathbf{C}[x]/g(x)$ の長さを b としたとき、 $M_1 \otimes_R M_2$ の長さは ab であるといえるか？そうであれば証明し、そうでなければ反例をあげよ。
71. 位数 3 の巡回群 μ_3 の群環 $\mathbf{Q}[\mu_3]$ を $\mathbf{Q}[\mu_3]$ -加群としての既約加群の直和に分解せよ。
72. 3 次の対称群 \mathfrak{S}_3 の群環 $\mathbf{Q}[\mathfrak{S}_3]$ と直積環 $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \times M(2, \mathbf{Q})$ の同型を具体的に与えよ。
73. $G = D_{10}$ を位数 10 の 2 面体群とする。すなわち G は a, b を生成元として、 $a^2 = b^5 = e, aba^{-1} = b^{-1}$ を基本関係式とする群であるとする。このとき次の問いに答えよ。
- (1) $\mathbf{C}[G]$ を $\mathbf{C}[G]$ -既約加群の直和に分解せよ。
 - (2) $\mathbf{C}[G]$ と直積環 $M(\mathbf{C}, n_1) \times \cdots \times M(\mathbf{C}, n_r)$ と同型であるという。 n_1, \dots, n_r を求め、同型を一つ与えよ。
 - (3) $\mathbf{Q}[G]$ と直積環 $M(D_1, n_1) \times \cdots \times M(D_r, n_r)$ と同型であるという。ただし、 D_1, \dots, D_r は \mathbf{Q} 上の斜体、 n_1, \dots, n_r は自然数である。このとき $D_1, \dots, D_r, n_1, \dots, n_r$ を求め、同型を一つ与えよ。
74. G を四元数体 \mathbf{H} の乗法群の部分群 $\langle \pm 1, \pm i, \pm j, \pm k \rangle$ とする。このとき次の問いに答えよ。
- (1) $\mathbf{Q}[G]$ と直積環 $M(D_1, n_1) \times \cdots \times M(D_r, n_r)$ と同型であるという。ただし、 D_1, \dots, D_r は \mathbf{Q} 上の斜体、 n_1, \dots, n_r は自然数である。このとき $D_1, \dots, D_r, n_1, \dots, n_r$ を求め、同型を一つ与えよ。
 - (2) $\mathbf{C}[G]$ と直積環 $M(\mathbf{C}, n_1) \times \cdots \times M(\mathbf{C}, n_r)$ と同型であるという。このとき n_1, \dots, n_r を求め、同型を一つ与えよ。