代数 III 演習問題

2015 年 1 月 20 日　担当：寺杣友秀

75. A を左アルチン的単純環とすると、その中心

$$Z(A) = \{z \in A \mid zx = xz \text{ for all } x \in A\}$$

は可換体となることを証明せよ。

76. D を斜体とする。

(1) D には極大な可換環が存在することを示せ。その一つを K とするとき、$Z(D)$ を含み $C(K)$ を

$$C(K) = \{d \in D \mid dk = kd \text{ for all k } \in K\}$$

とおく。これを D の K の交換団という。このとき $K = C(K)$ となり、$Z(D) \subset K$ であり、さらに K は体になることを示せ。

(2) K を D の極大可換環とする。以下の問題では $Z(D)$ 上 D は右加群として有限次元であるとする。D を右 K 加群としてみなしたものを D^r と書く。このとき

$$D \otimes_{Z(D)} K \to \mathrm{End}_K(D^r) : d \otimes k \mapsto \Big(x \mapsto dxk\Big)$$

が定まることを確かめよ。

(3) $D \otimes_{Z(D)} K$ の中心は K となることをしめせ。

(4) $D \otimes_{Z(D)} K$ の中での交換団について $C(K \otimes_{Z(D)} K) = K \otimes_{Z(D)} K$ であることを示せ。

77. D を斜体とする。このとき D 係数の r 次正方行列の環 $M(r, D)$ において D の元を対角的にならべたもの

$$A = \{\begin{pmatrix} d & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & d \end{pmatrix} \mid d \in D\}$$

を考えたとき $M(r, D)$ 内での A の交換団 $C(A)$ を求めよ。

78. $\mathbf{H}$ をハミルトンの四元数体とする。このとき環としての同型

$$\mathbf{H} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \simeq M(2, \mathbf{C})$$

を具体的に与えよ。

79. $\mathbf{F}_p$ を位数が p の有限体として、$\mathbf{F}(x)$ を $\mathbf{F}_p$ 上、不定元 x で生成される 1 変数有理関数体とする。さらに $\mathbf{F}_p(x)$ のなかで $\mathbf{F}_p$ 上 x^p で生成される部分体を $\mathbf{F}_p(x^p)$ とする。このとき $\mathbf{F}_p(x) \otimes_{\mathbf{F}_p(x^p)} \mathbf{F}_p(x)$ のヤコブソン根基を求めよ。