代数 III 演習問題

2014 年 10 月 7 日　担当：寺杣友秀

1. 複素数体 $\mathbf{C}$ 上の n 次正方行列 $M_n(\mathbf{C})$ 全体のなす環の両側イデアルは 0 または全体となることを示せ。

2. 次の行列 M に対して可逆な整係数行列を左右からかけることにより

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & e_n \end{pmatrix}$$

(ただし $e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n$) の形にせよ。

(1)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. $\mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$ と $\mathbf{Z}/48\mathbf{Z}$ は同型か？

4. m, n を 2 以上の整数とする。このとき $Hom_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ を求めよ。

5. k を体とする。

(1) $Hom_{k[x]}(k[x]/(x^2), k[x]/(x))$ の k 上の次元と基底を求めよ。
(2) $Hom_{k[x]}(k[x]/(x), k[x]/(x^2))$ の k 上の次元と基底を求めよ。

6. k を体とする。答え方を工夫すること。

(1) $Hom_{k[x,y]}(k[x,y]/(x), k[x,y]/(y))$ を求めよ。
(2) $Hom_{k[x,y]}(k[x,y]/(x), k[x,y]/(xy))$ を求めよ。

7. R を環として、K, L, M, N を右 R 加群とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $K \to L \to M \to 0$ が完全であるとき、

$$0 \to Hom_R(M,N) \to Hom_R(L,N) \to Hom_R(K,N)$$

が完全であることを示せ。

(2) $0 \to K \to L \to M$ が完全であるとき、

$$0 \to Hom_R(N, K) \to Hom_R(N, L) \to Hom_R(N, M)$$

が完全であることを示せ。

8. R を環として、M_1, M_2, N_1, N_2 を右 R 加群とする。このとき次の同型を証明せよ。

(1)

$$Hom_R(M_1, N_1 \oplus N_2) \simeq Hom_R(M_1, N_1) \oplus Hom_R(M_1, N_2)$$

(2)

$$Hom_R(M_1 \oplus M_2, N_1) \simeq Hom_R(M_1, N_1) \oplus Hom_R(M_2, N_1)$$

9. R を整域とする。（整域は以下、可換環とする。）M を R 加群とするとき、

$$M_0 = \{x \mid ax = 0 \text{ となる } 0 \text{ でない } R \text{ の元 } a \text{ がある。}\}$$

とおくと M の部分加群となることを示せ。

10. k を体とする。

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

として M を k^2(列ベクトル) とする。M に $k[x]$ 上の加群の構造を $f(x) \in k[x]$, $v \in M$ に対して

$$f(x)v = f(A)v$$

となるように入れる。

(1) このようにして M には $k[x]$ 上の加群の構造が定まることを示せ。
(2) $k[x]$ 加群として $k[x]/(x^2)$ と M は同型であることを示せ。