

代数 III 演習問題

2014 年 10 月 14 日 担当：寺杣友秀

11. $R = \mathbf{Q}[x]$ とする。次の (m, n) 行列 A で定義される写像を $f : R^n \rightarrow R^m$ とする時、

$$\text{Coker}(f) = R^r \oplus R/(e_1) \oplus R/(e_2) \oplus \cdots \oplus R/(e_m)$$

(ただし $e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_m$) の形に書け。

$$A = \begin{pmatrix} 3(x-1) & -2(x-1) \\ 2x-3 & (-x+2)(x-1) \end{pmatrix}$$

12. k を体として、 V, W を k 上の有限次元ベクトル空間とする。このとき、次の自然な同型があることを示せ。

$$\text{Hom}_k(V, W) \simeq V^* \otimes_k W$$

13. 次の問いに答えよ。

- (1) n, m を 2 以上の自然数とする。 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ を求めよ。
- (2) $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ をなるべく簡単な形で求めよ。
- (3) $R = \mathbf{Z}[x]/(3x-1)$, $S = \mathbf{Z}/(15)$ とするとき $R \otimes_{\mathbf{Z}} S$ を求めよ。

14. $\mathbf{Q}[x]$ の元 $f(x) = x(x+1)$, $g(x) = x^2$ を考える。

$$\mathbf{Q}[x]/(f(x)) \otimes_{\mathbf{Q}[x]} \mathbf{Q}[x]/(g(x))$$

を $\mathbf{Q}[x]$ -加群の標準形にせよ。

15. $R = \mathbf{Q}[x]$, $S = \mathbf{Q}[x, y]$ とする。 S を自然な仕方で R -加群とみる。このとき $S \otimes_R S$ をなるべく簡単な形で求めよ。

16. $\varphi : \mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{Z}^2$ を次の行列 A で定義される写像とする。ここで \mathbf{Z}^2 は整係数列ベクトルとみなす。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

φ より誘導される写像を

$$\varphi \otimes id_{\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}} : \mathbf{Z}^2 \otimes \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}^2 \otimes \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$$

とすると、 $\ker(\varphi \otimes id_{\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}})$ を求めよ。