代数 **III** 演習問題

2014 年 10 月 21 日　担当：寺杣友秀

17. $A=(a_{ij})_{ij}$ を n 次複素正方行列とする。$\mathbf{C}^n$ に $R=\mathbf{C}[x]$ 加群の構造を

$$f(x)v=f(A)v$$

によって入れたものを V_A と書く。

(1) $\phi_A\in GL(n,R)$ を $(\delta_{ij}x-a_{ij})_{ij}$ とする。$\varphi_A:R^n\to R^n$ を行列 Φ_A で定まる R-加群の準同型とする。このとき $V_A\simeq \operatorname{coker}(\varphi_A)$ を示せ。

(2) V_A を $V_A=R^r\oplus R/(e_1)\oplus R/(e_2)\oplus\cdots\oplus R/(e_m)$　(ただし $e_1\mid e_1\mid\cdots\mid e_m$) の形に書いたとする。このとき A が次の行列 (a),(b),(c) で与えられるとき、$(e_1),\dots,(e_m)$ のモニックな生成元を求めよ。

(a) $\begin{pmatrix}-3 & -15\\ 2 & 8\end{pmatrix}$　　(b) $\begin{pmatrix}-2 & 5 & -1\\ -2 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

(c) 行列 A のジョルダン標準形が

$$A=S\begin{pmatrix}L_1 & 0\\ 0 & L_2\end{pmatrix}S^{-1},\quad L_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1\\ 0 & \lambda_i\end{pmatrix}$$

で与えられている場合。ただし S は正則行列である。

18. p を素数とする。$N=\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ の部分加群 M で次の性質を満たすものはいくつあるか？

(1) $M\simeq\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$
(2) $N/M\simeq\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$

19. k を体とするとき、次の問いに答えよ。
(1) R を $V=k^2$ 上のテンソル代数 $T(V)$ とする。k^2 の標準基底を e_1,e_2 とするとき、R の k 上の基底をもとめよ。
(2) 上の R に対して e_1 の中心化集合つまり

$$\{x\in R\mid e_1x=xe_1\}$$

の形を求め、これは R の部分環となることを示せ。

20. R を $V=\mathbf{C}^2$ 上のテンソル代数 $T(V)$ とする。また $\mathbf{C}^2$ の標準基底を e_1,e_2 として、$M(2,\mathbf{C})$ を 2 次正方行列のなす環とする。

(1) このとき環の順同型 $\varphi:R\to M(2,\mathbf{C})$ であって

$$\varphi(e_1)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad \varphi(e_2)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

となるものがただ一つ存在することを示せ。(**19**.(1) を用いてよい。)

(2) φ の核の両側イデアルとしての生成系を一組もとめよ。