代数 III 演習問題

2014 年 10 月 28 日　担当：寺杣友秀

21. R を可換環、M, N, K を R 加群とするとき、次の R 加群としての同型を示せ。

$$Hom_R(M, Hom_R(N, K))) \simeq Hom_R(M \otimes_R N, K)$$

22. R, S を（可換を仮定しない）環とする N は左 R 加群であり、かつ右 S 加群であり、$r \in R, n \in N, s \in S$ に対して $(rn)s = r(ns)$ を満たすとする。さらに M を左 R 加群であるとする。このとき $Hom_R(N, M)$ にはつぎの仕方で左 S 加群の構造が定まることを示せ。$\varphi \in Hom_R(N, M), s \in S, n \in N$ に対して、$s\varphi$ を $(s\varphi)(n) = \varphi(ns)$ と定める。

23. $n \geq 3$ なる自然数とする。R を可換環、$A_1, \dots, A_n$ を射影的 R 加群とする。さらに

$$0 \to A_1 \xrightarrow{d_1} A_2 \xrightarrow{d_2} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}} A_n \to 0$$

を R 加群の完全列とする。このとき

$$\begin{aligned}&s_1 \circ d_1 = \mathrm{id}, d_1 \circ s_1 + s_2 \circ d_2 = \mathrm{id}, d_2 \circ s_2 + s_3 \circ d_3 = \mathrm{id}, \dots \\ &d_{n-2} \circ s_{n-2} + s_{n-1} \circ d_{n-1} = \mathrm{id}, d_{n-1} \circ s_{n-1} = \mathrm{id}\,.\end{aligned}$$

となる $s_i : A_{i+1} \to A_i$ $(1 \leq i \leq n-1)$ が存在することを示せ。

24. $R = \mathbf{Q}[x, y]$ とし、x, y で生成された R のイデアルを (x, y) とするさらに $\alpha : R \to R \oplus R : f \mapsto yf \oplus -xf$, $\beta : R \oplus R \to (x, y) : f \oplus g \mapsto xf + yg$ とおく。このとき

$$0 \to R \xrightarrow{\alpha} R \oplus R \xrightarrow{\beta} (x, y) \to 0$$

は完全系列となることをしめせ。

25. k を体として、$V = k \cdot x_1 \oplus k \cdot x_2$, $W = k \cdot y_1 \oplus k \cdot y_2 \oplus k \cdot y_3$ とする。$M = V \oplus W$ とおく。さらに $S^i(V)$ を x_1, x_2 に関する i 次同次多項式のなすベクトル空間（といったときには常に 0 を入れて考える。）とし、$\bigwedge^i M$ を M の i 次の外積代数とする。このとき次の列が完全系列となることを示せ。

$$0 \to S^2(V) \xrightarrow{d_1} S^1(V) \otimes_k \bigwedge^1 M \xrightarrow{d_2} \bigwedge^2 M \xrightarrow{d_3} \bigwedge^2 W \to 0$$

ここで

$$d_1(f(x_1, x_2)) = \frac{df}{dx_1} \otimes x_1 + \frac{df}{dx_2} \otimes x_2, \quad d_2(x_i \otimes y_j) = x_i \wedge y_j$$

で d_3 は射影 $M \to U$ から誘導される写像である。

26. 上の問題 **25** を一般化せよ。

27. $\mathbf{Q}$ は $\mathbf{Z}$ 平坦加群であるが、$\mathbf{Z}$ 自由加群でないことを示せ。

28. $R = \mathbf{Q}[x, y]$ とする。x, y で生成された R のイデアルを (x, y) とするとき $(x, y) \otimes_R (x, y)$ のねじれ元のなす部分加群の生成系をもとめよ。