# 代数 III 演習問題

2014 年 11 月 4 日　担当：寺杣友秀

**29.** $k$ を体として R=$k[x,y]$ を $k$ 上の 2 変数多項式環とする。$m=(x,y)$ を $x,y$ で生成される $R$ のイデアルとする。

(1) $\mathrm{id}_m \otimes i : m \otimes_R m \to m \otimes_R R$ を自然な単射 $i: m \to R$ から誘導される写像とする。これは単射ではないことを示せ。

(2) $m$ は $R$ 上ねじれはないが、平坦加群でないことを示せ。

**30.**

(1) $R$ を整域とする。$f$ を 0 でない $R$ の元とするとき $R[x]/(fx-1)$ は $R$ 上平坦であることを示せ。

(2) $R=k[x]$ を体 $k$ 上の 1 変数多項式環とする。このとき $k[x,y]/(xy-1)$ は $R$ 上平坦であるが射影的ではない事を示せ。

**31.**

(1) $\mathbf{Q}(\sqrt{2})\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ のイデアルをすべて求めよ。ここで $\mathbf{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2} \mid a,b\in\mathbf{Q}\}$ で定義される体である。

(2) $D\neq 0$ を整数の 2 乗で割れない整数とする。（負かもしれない。）このとき $\mathbf{Q}(\sqrt{D})\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{R}$ は体の直積となることを示し、いくつの体の直積となるか個数を答えよ。

**32.** $\alpha\in\mathbf{C}$ とする。$S=\mathbf{C}[t]$, $R_1=\mathbf{C}[x,y,t]/(xy-t)$, $R_2=\mathbf{C}[t]/(t-\alpha)$ として $R_1,R_2$ は自然な仕方で $S$ 上の代数とみる。このとき $R_1\otimes_S R_2$ は整域か? $\alpha$ の値で場合に分けて答えよ。

**33.** $S=\mathbf{C}[x,y]$, $R_1=\mathbf{C}[x,y]/(xy-1)$, $R_2=\mathbf{C}[x,y]/(x-y)$ として、$R_1,R_2$ は自然な仕方で $S$ 上の代数とみる。このとき $R_1\otimes_S R_2$ の環の構造を決定せよ。

**34.**

(1) $V$ を $\mathbf{C}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。$f:V\to V$ を $\mathbf{R}$ 線型写像であって、$a\in\mathbf{C}, v\in V$ に対して $f(av)=\overline{a}f(v)$ を満たすとする。ここで $\overline{a}$ は $a$ の複素共役である。さらに $f\circ f$ は $V$ の恒等写像であるとする。このとき

$$W=\{v\in V \mid f(v)=v\}$$

は $V$ の実ベクトル空間で $\dim_{\mathbf{R}}W=\dim_{\mathbf{C}}V$ となることを示せ。

(2) $\mathbf{R}$ 線型写像 $W\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}\to V : v\otimes a\mapsto av$ は同型写像であることを示せ。

(3) $M\in GL(n,\mathbf{C})$ が $M\overline{M}=I_n$ を満たすとする。このとき $M=\overline{A}A^{-1}$ となる $A\in GL(n,\mathbf{C})$ が存在する事を示せ。