

### 代数 III 演習問題

2014年11月11日 担当：寺杉友秀

35.  $A, B \in GL(n, \mathbf{C})$  とする。  $\rho(1, 0) = A, \rho(0, 1) = B$  となる  $\mathbf{Z}/m \times \mathbf{Z}/l$  の表現  $(\mathbf{C}^n, \rho)$  が存在するための  $A, B$  の条件を求めよ。

36.  $A, B \in GL(n, \mathbf{C})$  とする。  $\rho((1, 2)) = A, \rho((2, 3)) = B$  となる 3 次対称群  $\mathfrak{S}_3$  の表現  $(\mathbf{C}^n, \rho)$  が存在するための  $A, B$  の条件を求めよ。ここで  $(i, j)$  は  $i$  と  $j$  の互換のことである。

37.  $V = \mathbf{C}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  として、  $\mathfrak{S}_3$  の元  $\sigma$  に対して  $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$  によって定める。これは  $\mathfrak{S}_3$  の表現となることを示せ。また  $V$  の部分表現をすべて求めよ。

38. 3変数  $x_1, x_2, x_3$  の多項式環  $R$  とする。  $\mathfrak{S}_3$  の元  $\sigma$  に対して  $\rho(\sigma)(x_i) = x_{\sigma(i)}$  によって定まる環の準同型  $\rho(\sigma)$  を考える。  $R$  の同次 2 次式のなす部分空間  $R_2$  は  $\mathfrak{S}_3$  の表現となることを示し、  $\rho$  の指標を求めよ。また次数が 3 の同次式のなす部分空間  $R_3$  について同様のものを求めよ。

39. 次の問いに答えよ。

- (1)  $S_3$  の既約表現の同型類の完全代表系をひとつ求めよ。またそれらの指標をもとめよ。
- (2) 問 38 に現れる表現  $R_2, R_3$  を上に現れる既約表現の直和として表せ。

40. 次の問いに答えよ。

- (1) 2 面体群  $D_{2n} = \langle a^n = b^2 = e, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$  の共役類をすべて求めよ。
- (2)  $D_{2n}$  の既約指標をすべて求めよ。

41.  $D_{2n}$  を上で定義された 2 面体群として  $a, b$  を上のおりとする。

- (1) 2 変数の多項式環  $R = \mathbf{C}[x, y]$  に対して

$$\begin{aligned} \rho(a)(x) &= \zeta_n x, \rho(a)(y) = \zeta_n^{-1} y \\ \rho(b)(x) &= y, \rho(b)(y) = x \end{aligned}$$

により  $\mathbf{C}$  上の環準同型  $\rho(a), \rho(b)$  を定める。  $R_d$  を  $R$  の同次  $d$  次式のなす部分空間とする。  $R_d$  は  $\rho$  により、  $D_{2n}$  の表現となることを示せ。

- (2)  $R_d$  を  $D_{2n}$  の既約表現の直和に分解したときどのように分解するか？必要であれば前問の記号、結果を用いてよい。

42. 次の問いに答えよ。

- (1)  $\mathfrak{S}_4$  の共役類をすべて求めよ。
- (2)  $\mathfrak{S}_4$  の既約表現の同値類（同型類）の完全代表系を求めよ。またそれらの指標をすべて求めよ。

43. 次の問いに答えよ。

- (1)  $GL(2, \mathbf{F}_3)$  の共役類をすべて求めよ。
- (2)  $GL(2, \mathbf{F}_3)$  の既約表現の同値類（同型類）の完全代表系を求めよ。またそれらの指標をすべて求めよ。