代数 III 演習問題

2014 年 11 月 18 日　担当：寺杣友秀

44. m, n を 2 より大きい自然数として $m \mid n$ とする。$G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $H = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ として $p : G \to H$ を自然な射影とする。p から誘導される G の左からの作用により $\mathbf{C}[H]$ を G の表現と見るとき、これを既約表現の直和に分解せよ。

45. 次の問いに答えよ。

(1) $\mathfrak{S}_3$ を 3 次の対称群とするとき群環 $A = \mathbf{C}[\mathfrak{S}_3]$ の元

$$p = \frac{1}{3}(e - (13))(e + (12))$$

とおくと、$p = p^2$ となることを示せ。ここで (ij) は i, j の互換、e は単位元とする。

(2) G の左からの作用により $Ap = \{ap \mid a \in A\}$ を G の表現とみるとき、Ap は既約表現か？また Ap の次元を求めよ。

46. 次の問いに答えよ。

(1) G, H を有限群とする。V, W をそれぞれ G, H の $\mathbf{C}$ 上の有限次元表現とする。このとき $V \otimes W$ は $(g, h)(v \otimes w) = (gv) \otimes (hw)$ なる作用により、$G \times H$ の表現となることをしめせ。またその指標を V, W のそれぞれの指標を用いてあらわせ。この表現を $V \boxtimes W$ と書く。

(2) さらに V, W を既約表現とするとき、$V \boxtimes W$ は既約表現となることを証明せよ。

47. G を有限群として V を G の $\mathbf{C}$ 上の有限次元表現とする。

(1) V の n 次の対称テンソル $S^n(V)$ は G の表現となることを示せ。

(2) $S^2(V), S^3(V)$ の指標を $\chi_V(g)$,$\chi_V(g^2)$,$\chi_V(g^3)$ を用いてあらわせ。

48. G を有限群として V を G の $\mathbf{C}$ 上 2 次元の表現とする。（つまり、G の 2 次の表現とする。）さらに $a_1(g), a_2(g)$ を $\det(I_2 - t\rho(g)) = 1 - a_1(g)t + a_2(g)t^2$ によって定める。$a_1(g), a_2(g)$ を $\chi_V(g), \chi_V(g^2)$ を用いてあらわせ。

49. G を有限群として、S を G が作用する有限集合とする。さらに $V_S = \oplus_{s \in S} \mathbf{C} e_s$ を e_s を基底とするベクトル空間とする。

(1) このとき $g \cdot e_s = e_{gs}$ と定義することにより V は G の表現となることをしめせ。

(2) g を G の元とするとき、g による固定点の集合を $S_g = \{s \in S \mid gs = s\}$ とおく。このとき $\chi_{V_S}(g) = \# S_g$ を示せ。

(3) $\dfrac{1}{\mid G \mid} \sum_{g \in G} \chi_{V_S}(g)$ は S の G による軌道の個数と等しいことを示せ。

50. $a_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, $a_2 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$, $a_3 = \{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ とおく。さらに $S = \{a_1, a_2, a_2\}$ とする。このとき文字 $\{1, 2, 3, 4\}$ の置換により集合 S に $\mathfrak{S}_4$ が作用することを説明せよ。また V_S を問い 49 で定義された $\mathfrak{S}_4$ の表現とするとき、V_S を既約表現に分解せよ。