代数 III 演習問題

2014 年 11 月 25 日　担当：寺杣友秀

51. G を有限群とする。このとき群環 $\mathbf{C}[G]$ の中心

$$Z(\mathbf{C}[G]) = \{x \in \mathbf{C}[G] \mid yx = xy \ \text{ for all } h \in \mathbf{C}[G]\}$$

の基底をもとめ、その次元を求めよ。

52. 次の問いに答えよ。

(1) V を G の既約表現とするとき、$\mathbf{C}[G]$ の元 x に対して V への作用を対応させるときに得られる写像

$$\varphi : \mathbf{C}[G] \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, V)$$

は環の順同型であることを示せ。

(2) また $\mathbf{C}[G]$ の元 $[g]$ に $G \times G$ の作用を $(g_1, g_2)[g] = [g_1 g g_2^{-1}]$ で定めると $G \times G$ の表現となる。このとき上の写像 φ は $G \times G$ 準同型となるように $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, V)$ の作用が入れられることを示せ。

(3) 準同型 φ は全射であることを示せ。

53. 次の問いに答えよ。

(1) n 次の正方行列のなす、行列環 $M(n, \mathbf{C})$ の中心を求めよ。

(2) 問い 52 の写像 φ を $Z(\mathbf{C}[G])$ に制限して得られる環準同型 $Z(\mathbf{C}[G]) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V, V)$ を考えたときその像の次元は 1 次元であることを示せ。

54. 2 以上の整数 m, n が $m \mid n$ を満たしているとする。$n' = \dfrac{n}{m}$ とおく。a を整数として、$\zeta = \exp(\dfrac{a2\pi\mathbf{i}}{n'})$ とおく。$V = \mathbf{C}$ なる $H = \mathbf{Z}/n'\mathbf{Z}$ の表現を $\rho(\overline{1}) = \zeta$ により定める。$G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ として $f : H \to G$ を $f(\overline{1}) = \overline{m}$ により定める。これにより定まる群環の準同型 $\mathbf{C}[H] \to \mathbf{C}[G]$ を考える。このときテンソル積

$$\mathbf{C}[G] \otimes_{\mathbf{C}[H]} V$$

を左からの G の作用によりって G の表現とみるとき、この表現を既約表現の直和に分解せよ。

55. V を G の表現とする、χ_V を V の指標とする。$g \neq e$ のとき $\chi_V(g) = 0$ ならば V は正則表現 $\mathbf{C}[G]$ の直和となることを示せ。