代数 III 演習問題

2014 年 12 月 16 日　担当：寺杣友秀

56. $\mathbf{Q}[x,y]$ の部分 $\mathbf{Q}$ 代数でネーター環とならない例をあげよ。

57. $D = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Q}[x]$ の部分環となることを示せ。またこの環 D はネーター環となるかどうか判定せよ。

58. $R = \mathbf{C}[x,y]$ とするとき、次の R-加群 M の長さを求めよ。

$$M = \mathbf{C}[x,y]/(x^2+y^2, x+y-a)$$

59.

(1) $\mathbf{Q}[x]$ 加群 $M_1 = \mathbf{Q}[x]/(x^2-2)$ 及び $M_2 = \mathbf{Q}[x]/(x^2-2)^2$ の長さをもとめよ。
(2) $\mathbf{C}[x]$-加群 $M_1 \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ の長さを求めよ。

60. $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{C}$ はネーター環であるかどうか判定せよ。

61. $\mathbf{C}[x]/(x^n)$ は $\mathbf{C}[x]$ 加群として直既約であるが、既約ではないことを示せ。

62. $R = \mathbf{C}[x,y]$ とする。R のイデアル M, N を $M = (x,y)$,$N = (x^3, x^2y, xy^2, y^3)$ とおくとき、M/N は長さは有限であるが、直既約分解をもたないことを示せ。

63. $f(x)$ を $\mathbf{C}[x]$ の定数でない元とする。このとき

(1) $\mathbf{C}[x]/f(x)$ の $\mathbf{C}[x]$ 加群としての長さを $f(x)$ の言葉で表せ。
(2) $\mathbf{C}[x]/f(x)$ は $\mathbf{C}[x]$ 加群として直既約に分解できることを示し、その直和因子の数を $f(x)$ の言葉で表せ。

64. M を $\mathbf{Z}$ 加群

$$M = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/45\mathbf{Z}$$

とする。このとき

(1) M の $\mathbf{Z}$ 加群としての長さを求めよ。
(2) M は $\mathbf{Z}$ 加群として直既約に分解できることを示し、その直和因子の数を求めよ。

65. M を $\mathbf{Z}$ 加群

$$M = \mathbf{Z}/e_1\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}/e_n\mathbf{Z}$$

とする。ただし $e_1 \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n$ とする。このとき

(1) M の $\mathbf{Z}$ 加群としての長さを求めよ。
(2) M は $\mathbf{Z}$ 加群として直既約に分解できることを示し、その直和因子の数を求めよ。