楕円型作用素のフレドホルム性

Tuesday 20^{th} June, 2017

目次

1. 主定理とその証明に使われる命題

1.1. 二つの主定理. X を n 次元 C^∞ コンパクト多様体、E, F をともに階数が r の C^∞ 実ベクトル束、$C^\infty(X,E), C^\infty(X,F)$ を可微分切断のなすベクトル空間とする。さらに

$$P : C^\infty(X,E) \to C^\infty(X,F)$$

を k 階楕円型 C^∞ 微分作用素とする。この章の目的は次の定理の概略を述べることである。

定理 1.1. $\ker(P), \operatorname{coker}(P)$ は有限次元である。

二つ目の定理を述べるには内積を定義する必要がある。$C^\infty(X,E)$ 上の内積を定義するために、二つの有限被覆 $\cup_{i\in I} U_i$ と $\cup_{i\in I} V_i$ で次の性質をもつものをとる。

(1) 任意の $i \in I$ について $\overline{U_i} \subset V_i$ となる。
(2) $(E, |*|_E), (F, |*|_F)$ は開集合 V_i 上で自明化される。
(3) V_i は $[0,2\pi]^n \subset \mathbf{R}^n$ の開集合と向きを保つ微分同相でこれが写像 $\varphi_i : V_i \to \mathbf{R}^n$ で与えられる。

さらに、この有限被覆に対して実数値 C^∞ 関数族 $\{\omega_i\}_{i\in I}$ で次の性質を持つものをとる。

(1) $\operatorname{supp}(\omega_i) \subset V_i$ である。
(2) $x \in U_i$ であれば $\omega_i(x) = 1$ である。($\{\omega_i\}$ は 1 の分解ではない。)
(3) すべての x について、$0 \le \omega_i(x) \le 1$

大域的 n-次 C^∞ 微分形式 ω_X を

$$\omega_X = \sum_i \omega_i^2 \varphi_i^*(dx_1 \wedge \cdots dx_n) \tag{1.1.1}$$

とおく。ω_X は体積形式とよばれる。さらに E, F 上に C^∞ な内積 $(,)_E$,$(,)_F$ (各点ごとの内積であって座標に関して係数が C^∞ で書けるもの) を固定する。この時、$C^\infty(X, E)$ には、

$$\langle s, t\rangle = \int_X (s,t)_E \omega_X \tag{1.1.2}$$

により内積が定まる。この内積から $||s|| = \sqrt{(s,s)}$ によりノルムが定まる。また E, F の内積と X の体積形式 ω_X を定めると、P の形式的随伴 P^*

$$P^* : C^\infty(X, F) \to C^\infty(X, E)$$

が定まり、P^* も楕円型作用素となる。このとき、次が成り立つ。

定理 1.2.

$$C^\infty(X, E) = \ker(P) \oplus \mathrm{Im}(L^*),$$
$$C^\infty(X, F) = \ker(P^*) \oplus \mathrm{Im}(L),$$

P と P^* は全く対称なので上の式と $\ker(P)$ の有限次元性が示されれば、$\mathrm{coker}(P)$ の有限次元性が示されたことになる。内積 $\langle *, *\rangle$ により $C^\infty(X, E)$ は前ヒルベルト空間となるので完備化をすることによりヒルベルト空間 $L^2(X, E)$ が得られる。

1.2. **多様体のソボレフ・ノルム.** C^∞ 多様体 X とその C^∞ ベクトル束に関するソボレフ・ノルムおよびソボレフ空間を定義し、X を C^∞ 多様体、E を C^∞ ベクトル束とする。まずソボレフノルムを定義しよう。X の二つの有限被覆 $\cup_{i\in I} U_i$ と $\cup_{i\in I} V_i$ と実数値 C^∞ 関数族 $\{\omega_i\}_{i\in I}$ で $L^2(X, E)$ を定義したものをとる。$V = \mathbf{C}^r$ とおく。さらに E の V_i における自明化を与える局所基底をとりかえることにより、開集合 V_i 上で $(E, |*|_E)$ は $(V, |*|_V)$ と内積空間として同型となるようにする。

定義 1.3. (1) f をコンパクト台をもつ $A = \mathbf{R}^n$ 上の V 値 C^∞ 関数とする。f の k ソボレフノルム $||*||_k^{st}$ を

$$||f||_k^{st} = \sum_{|\alpha|\le k} \int_{\mathbf{R}^n} |D^\alpha f(x)|_V^2 dx_1 \cdots dx_n$$

と定義する。ここで $|*|_V$ は V の標準ノルム、$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ は 0 以上の整数を成分とするベクトル、$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$、$D^\alpha$ は高階の偏微分

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x)$$

である。

(2) X のソボレフ・ノルムを $f \in C^\infty(X,E)$ に対して

$$||f||_k = \sum_i ||\omega_i f||_k^{st}$$

と定義する。ここで ω_i は *(1.1.1)* で用いられらたもの、$\omega_i f$ はサポートが V_i に含まれている $C^\infty(X,E)$ の元なので、V_i 上の局所座標と $(E, |*|_E)$ の自明化を用いて f を V_i 以外では値 0 をとる $\mathbf{R}^n$ 上の V 値 C^∞ 関数とみなした。

(3) ソボレフノルム $||*||_k$ に関する $C^\infty(X,E)$ の完備化をソボレフ空間といい $W_k(X,E)$ と書く。ソボレフ空間はヒルベルト空間となる。

補題 1.4. (1) 自然数 r に対してある $C>0$ が存在して $||v||_r \le C||v||_{r+1}$ となる。とくに $W_{r+1}(X,E) \subset W_r(X,E)$ なる単射がある。

(2) $C^\infty(X,E)$ 上において二つのノルム $||*||_0$ と $||*||$ は等しい。従って $W_0(X,E) = L^2(X,E)$ となる。

証明. (1) は定義により明らかである。

(2)

$$\begin{aligned}||f||_0 =& \sum_i ||\omega_i f||_0^{st} = \sum_i \int_{\mathbf{R}^n} |\omega_i f|_V^2 dx_1 \cdots dx_n \\ =& \int_X |f|_E^2 \sum_i \varphi_i^*(\omega_i^2 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = \int_X |f|_E^2 \omega_X\end{aligned}$$

□

1.3. **証明に用いられる命題.** ソボレフ・ノルムを用いて、定理 1.1, 1.2 の証明に使われるいくつかの命題を述べる。これらの補題の証明は次の節以降に述べる。

命題 1.5. $W_0(X,E) = L^2(X,E)$ で $||*||_0$ は $||*||$ と同値である。$0 < r < r'$ とすると、$W_{r'}(X,E)$ のノルム $||*||_{r'}$ に関する任意の有界列は $W_r(X,E)$ のノルムによるトポロジーでのコーシー列を含む（レリッヒの定理)。

任意の無限点列が収束する無限部分列を含むとき、相対コンパクトであるという。

命題 1.6 (微分作用素の延長、アプリオリ評価, 楕円型評価). P, P^* を k 階の楕円型微分偏微分作用素と、その形式的随伴作用素とする。これらは、$W_{k+l}(X,E) \to W_l(X,F)$ $W_{k+l}(X,F) \to W_l(X,E)$ なる連続線型写像 P_{k+l}, P_{k+l}^* に拡張される。また、ある $c>0$ が存在して $u \in W_{r+k}$ に対して、

$$||u||_{l+k} < c(||P(u)||_l + ||u||_l) \tag{1.3.3}$$

が成り立つ。

以上の補題を用いて、P を $W_k(E) \to W_0(F)$ に拡張した P_k に関して $\ker(P_k)$ 有限次元性と直和分解を次の節で証明する。実際にそれらが C^∞ 切断上における有限次元性を導くことを言うには次の正則性の定理が必要となる。

命題 1.7 (正則性定理). (1) α を $W_k(E)$ の元で $P_k(\alpha)$ が $C^\infty(E)$ の元であれば、α は $C^\infty(E)$ の元である。

(2) $\alpha \in W_0(E), \beta \in W_0(F)$ が任意の $x \in C^\infty(E)$ に対して

$$(x, \alpha)_E = (P(x), \beta)_F$$

を満たせば $\beta \in W_k(F)$ であって $\alpha = P^*(\beta)$ である。

2. 命題の仮定した定理の証明

前節の命題 1.5, 1.6, 1.7 の仮定の下で、定理 1.1, 1.2 の証明を述べる。ここで使われるヒルベルト空間における一般論については § を参照のこと。

定理 1.1 の証明

命題 2.1. (1) P の拡張

$$P_k : W_k(E) \to W_0(F)$$

に対して $\ker(P_k)$ は有限次元である。

(2) $\ker(P) = \ker(P_k)$ である。

証明. (1) $v \in \ker(P_k)$ とすると、楕円型評価により、

$$||v||_k \le c(||P_k(v)||_0 + ||v||_0) = c||v||_0$$

となる。ベクトル空間 $\ker(P_k)$ の中で $||*||_0$ ノルムに関する有界集合は上の不等式により、$||*||_k$ ノルムに関する有界集合となり、レリッヒの定理により、これは $||*||_0$ 位相で相対コンパクトになる。従って $\ker(P_k)$ は有限次元[1] となる。

(2) $\ker(P) = C^\infty(E) \cap \ker(P_k)$ より $\ker(P) \subset \ker(P_k)$ となる。逆に $\alpha \in W_k(E)$ に対して、$P_k(\alpha) = 0$ であれば、定理 1.7(1) により $\alpha \in \ker(P)$ となる。 □

定理 1.2 の証明の前にいくつか補題を証明する。$T = L^2(E) \oplus L^2(F)$ は直交内積 $||(e, f)||_T = ||e||_L^2 + ||f||_L^2$ $(e \in E, f \in F)$ によりヒルベルト空間になる。線型写像

$$(\mathrm{id}, P) : C^\infty(E) \to L^2(E) \oplus L^2(F) : (\alpha \mapsto (\alpha, P(\alpha))$$

$$(-P^*, \mathrm{id}) : C^\infty(F) \to L^2(E) \oplus L^2(F) : (\beta \mapsto (P^*(\beta), \beta))$$

の像の $||*||_T$ に関する閉包 $\Gamma(P), \Gamma(-{}^tP^*)$ をグラフ閉包という。

補題 2.2. (1) $(\mathrm{id}, P), (-P^*, \mathrm{id})$ は同型

$$(\mathrm{id}, P_k) : W_k(E) \to \Gamma(P), (-P_k^*, \mathrm{id}) : W_k(F) \to \Gamma(-{}^tP^*)$$

を引き起こし、$W_k(E), W_k(F)$ における $||*||_k$ ノルムと $\Gamma(P), \Gamma(-{}^tP^*)$ 上の直積ノルムから引き起こされたノルムは同値である。

(2) $\Gamma(P)$ と $\Gamma(-{}^tP^*)$ は互いに直交補空間である。

証明. (1) 楕円型評価の言い換えである。

(2) これは命題 1.7 (2) の言い換えである。 □

補題 2.3. (1) $\ker(P_k)$ は $L^2(X)$ のノルムに関して閉部分空間である。

(2) $\alpha \in \ker(P_k^*)^\perp \cap W_k(F)$ であれば、$||\alpha||_k \le c||P_k^*(\alpha)||_0$.

[1]任意の有界集合が相対コンパクトである前ヒルベルト空間空間は有限次元である。

(3) $\mathrm{Im}(P_k^*) \subset W_0$ は $||*||_0$ のノルムに関して閉空間である。特に $\mathrm{Im}(P_k^*)$ は $L^2(E)$ の閉部分空間である。
(4) $\mathrm{Im}(P_k^*)^{\perp} = \ker(P_k)$ ここで $(*)^{\perp}$ は $L^2(E)$ 内積に関する直交補空間である。
(5) $L^2(E)$ の中で、$\mathrm{Im}(P_k^*) = \ker(P_k)^{\perp}$ が成り立つ。

証明. (1) $u_i \in \ker(P_k)(\subset W_k(E))$ と $u \in L^2(E)$ が $||u_i - u||_0 \to 0$ を満たすとき、$u \in \ker(P_k)$ をいう。楕円型評価により、

$$||u_j - u_j||_k \le C(||P_k(u_i - u_j)||_0 + ||u_i - u_j||_0) = C||u_i - u_j||_0$$

で $\{u_i\}$ は $||*||_0$ ノルムに関するコーシー列であることから $\{u_i\}$ は $||*||_k$ ノルムに関するコーシー列であることが帰結され、$u \in W_k$ に収束する。P_k の $||*||_k$ ノルムに関する連続性から $||P_k(u_i) - P_k(u)||_0 \to 0$ となるが $P_k(u_i) = 0$ なので、$u \in \ker P_k$ となる。

(2) 背理法で証明する。命題の定数 c が存在しなければ $\alpha_i \in \ker(P^*)^{\perp} \cap W_k(F)$ で

$$||\alpha_i||_k = 1, ||P^*(\alpha_i)||_0 \le \frac{1}{i}$$

となる α_i $(i = 1, 2, 3, \dots)$ が存在する。レリッヒの定理を用いると α_i から $W_0(F)$ のノルムで α 収束する部分列をとることができる。このとき $(-P_k^*\alpha_i, \alpha_i)$ は $\Gamma(-{}^tP^*) \subset L^2(E) \oplus L^2(F)$ の収束列となり、その収束先は $(0, \alpha)$ と書ける。$\Gamma(-{}^tP^*)$ の位相は $W_k(F)$ の位相と一致するので α_i は $W_k(F)$ において α に収束する。さらに $\ker(P^*)$ は $W_0(F)$ で閉集合なので、$\alpha \in \ker(P^*)^{\perp} \cap \ker(P^*)$ となるので $\alpha = 0$ となる。これは $||\alpha_i||_k = 1$ に矛盾する。

(3) $\ker(P_k^*)$ は有限次元なので、$\ker(P_k^*)$ の正規直交基底 $\{b_i\}$ をとることにより、$\alpha \in W_k(F)$ の代わりに $\alpha' = \alpha - \sum_i (\alpha, b_i) b_i \in \ker(P_k^*)^{\perp} \cap W_k(F)$ を考えると $P_k^*(\alpha) = P_k^*(\alpha')$ となる。従って $\mathrm{Im}(P_k^*)$ が $W_0(F)$ で閉部分空間であることを言うには、

$\alpha_i \in W_k(F)$ なる列に対して、$||P_k^*(\alpha_i) - \beta||_0 \to 0$ であれば
$\beta = P_k^*(\alpha)$ となる $\alpha \in W_k(F)$ が存在する

ということを言えばよいが、そのためには、すべての i について $\alpha_i \in \ker(P_k^*)^{\perp} \cap W_k(F)$ であると仮定してかまわない。従ってその仮定のもとでは (2) を用いれば、α_i は $||*||_k$ ノルムに関するコーシー列なので、$\alpha \in W_k(F)$ に収束する。P_k^* は連続なので、$P_k^*(\alpha) = \beta$ となる。

(4) $\mathrm{Im}(P^*)^{\perp} \subset \ker(P)$ を示す。$\alpha \in \mathrm{Im}(P^*)^{\perp}$ とすると、任意の $\beta \in C^{\infty}(F)$ に対して $((\alpha, 0), (P^*(\beta), \beta)) = 0$ 従って $(\alpha, 0) \in \Gamma(-{}^tP^*)^{\perp}$ であるが、命題 2.2(2) により $(\alpha, 0) \in \Gamma(P)$ となる。逆に $\alpha \in \ker(P)$ であれば、$(\alpha, 0) \in \Gamma(P)$ なので、$(\gamma, \beta) \in \Gamma(-{}^tP^*)$ について $(\alpha, \gamma) = ((\alpha, 0), (\gamma, \beta)) = 0$ 従って $\alpha \in \mathrm{Im}(P^*)^{\perp}$.

(5) ヒルベルト空間の閉部分空間の直交補空間に関する一般論[2] により、(4) で示された $\mathrm{Im}(P^*)$ が閉集合であることから帰結される。 □

定理 1.2 の証明 $\ker(P) = \ker(P_k)$ となるので L^2 において $\ker(P)^{\perp}$ は $\mathrm{Im}(P_k^*)$ と一致する。さらに正則性定理から $\mathrm{Im}(P_k^*) \cap C^{\infty}(E)$ の元は $\mathrm{Im}(P^* : C^{\infty}(F) \to C^{\infty}(E))$ に属する。これから $C^{\infty}(E)$ に関する定理の直和分解を得る。

[2] 後述

3. 周期的関数とソボレフ・ノルム

$\mathbf{R}^n = \{(x_1,\ldots,x_n)$ とおき、$T=\mathbf{R}/(2\pi i\mathbf{Z})^n$ とおく。$X=T^n$ とする。このとき T^n 上の複素係数 C^∞ 関数 $\varphi\in C^\infty(T^n,\mathbf{C})$ は次のフーリエ展開を持つ。

$$\varphi=\sum_\xi \varphi_\xi \exp(\xi\cdot x)$$

このとき φ_ξ はフーリエ係数と呼ばれる。整数 s に対して、（フーリエ係数による）ソボレフ・ノルム $||\varphi||_s^T$ を

$$(||\varphi||_s^T)^2=\sum_{\xi\in\mathbf{Z}^n}(1+||\xi||^2)^s||\varphi_\xi||^2$$

と定義する。この節において、$||\varphi||_s^T$ は単に $||\varphi||_s$ と書くことにする。$s=0$ のときは $C^\infty(T^n,\mathbf{C})$ の L^2 ノルムと一致する。さらに次の定理が成り立つ。

補題 3.1. k を 0 以上の整数とする。このとき周期的複素数値 C^∞ 関数に対して

$$||f||_k^{st}=\sum_{|\alpha|\le k}\int_{[0,2\pi]^n}|D^\alpha f|^2dx_1\cdots dx_n$$

と定義すると、これは（フーリエ係数による）ソボレフノルム $||*||_k^T$ と同値である。

従って（フーリエ係数による）ソボレフノルムはソボレフノルムを自然に負の整数にまで拡張したものといえる。ソボレフ・ノルム $||*||_s$ に関する $C^\infty(T^n,\mathbf{C})$ の完備化を $W_s(T^n,\mathbf{C})$ と書き、T^n のソボレフ空間という。整数 s,t が $s<t$ であれば、$(1+||\xi||^2)^s<(1+||\xi||^2)^t$ なので

$$||\varphi||_s<||\varphi||_t$$

となる。この不等式より $||*||_t$ に関するコーシー列は $||*||_s$ に関するコーシー列なので $W_t(T^n,\mathbf{C})\subset W_s(T^n,\mathbf{C})$ なる包含写像が得られる。また $|\alpha|=k$ であれば、$D^\alpha : C^\infty(T^n)\to C^\infty(T^n)$ は $||*||_{s+k}$ ノルムに関する有界集合は $||*||_s$ に関する有界集合に写されるので $W_{s+k}(T^n)\to W_s(T^n)$ への連続線型写像に延長される。次の定理は一般の多様体におけるソボレフノルムとの比較をするときに用いられる。

命題 3.2 (レリッヒの定理)**.** 整数 s,t が $s<t$ を満たしていると、包含写像 $W_t(T^n,\mathbf{C})\subset W_s(T^n,\mathbf{C})$ はコンパクト作用素である。

証明. 実数 u、正数 r、$\psi\in W_u(T^n,\mathbf{C})$ に対して原点 ψ の半径 r のソボレフ・球 $B_u(\psi,r)$ を

$$B_u(\psi,r)=\{\varphi\in W_u \mid ||\varphi-\psi||_u\le r\}$$

と定義する。このとき任意の ϵ に対して有限個の $\psi_1,\ldots,\psi_m\in W_s$ が存在して、$B_t(0,1)$ は有限個の $B_s(\psi_i,\epsilon)$ で覆われることを示せばよい。

□

命題 3.3 (ソボレフの埋め込み定理)**.** s を 0 以上の整数とし、$l=[n/2]+1$ とする。このとき任意の $W_{s+l}(T^n,\mathbf{C})$ の元 φ に対してある C^s 級関数 ψ が存在して任意の $\eta\in L_2(T)$ に対して $\langle\psi-\varphi,\eta\rangle=0$ となる。

証明. $t=l$ のときを考える。シュワルツの不等式より、

$$\left(\sum_{\xi}|\varphi_{\xi}|\right)^2 \leq \left(\sum_{\xi}(1+||\xi||^2)^{-t}\right)\left(\sum_{\xi}(1+||\xi||^2)^{t}|\varphi_{\xi}|^2\right)$$

となる。従って $||*||_l$ ノルムに関する連続関数のコーシー列は一様収束収束するので、その収束先は連続関数となり φ は $C^0(X,E)$ の元である。従って $W_t(T^n,\mathbf{C})$ の元は連続関数になる。一般の場合は D^{α} が $W_{s+k}(T^n)\to W_s(T^n)$ への連続線型写像に延長されることからわかる。 □

命題 3.4 (ピーター・ポール不等式)**.** $s<t<u$ とする。このとき任意の ϵ に対して $C(\epsilon)$ が存在して任意の $\varphi\in C^{\infty}(T^n,\mathbf{C})$ に対して

$$||\varphi||_t \leq \epsilon||\varphi||_u + C(\epsilon)||\varphi||_s$$

つまり $||*||_u$ ノルムは、補正項として $||*||_s$ を許すことにすると、どんなに小さい定数倍で置き換えても $||*||_t$ ノルムより強いということである。

命題 3.5 (差分商とソボレフ指数)**.** $f\in W_k(T)$ と $h\in\mathbf{R}^n$ に対して、$\Delta_h(f)(x)=f(x+h)-f(x)$ とおく。ある正数 $\epsilon>0$ が存在して $\dfrac{1}{|h|}||\Delta_h(f)||_k$ が $|h|<\epsilon$ において有界であるとする。このとき $f\in W_{k+1}(T)$ である。

4. 多様体上のソボレフ・ノルムに関する定理

周期的関数のソボレフ・ノルム $||*||_k^T$ と多様体のソボレフノルム $||*||_k$ を比較することにより、ソボレフの埋め込み定理とレリッヒの定理を証明する。$h\in C^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ とする。ライプニッツの公式による微分作用素の公式

$$D_i\cdot h - h\cdot D_i = D_i(h)$$

を繰り返し用いることにより、$|\alpha|=k$ として、微分作用素 $D^{\alpha}h$ を係数関数の掛け算を項の左側に持ってくると 、$hD^{\alpha}+\sum_{|\beta|\leq k-1}a_{\beta}(x)D^{\beta}$ と書ける。このとき $a_{\beta}(x)$ は $h(x)$ の偏微分たちの線型結合となることに注意しよう。

定義 4.1 (多様体上の負の次数を持つソボレフノルム)**.** コンパクト多様体 X とし開被覆 $X=\cup_i U_i=\cup_i V_i$、および V_i に台をもつ C^{∞} 関数 ω_i を定義式 *(1.1.1)* で用いたものとする。$C^{\infty}(E)$ 上の（局所フーリエ係数を用いた）ソボレフノルム $||*||_s^T$ を

$$||f||_k^T=\sum_i ||\omega_i f||_k^T$$

と定義する。命題 *3.1* より 0 以上の整数 s に対して $||*||_s$ と $||*||_s^T$ は同値なノルムを定めている。ソボレフノルム $||*||_s^T$ に関する $C^{\infty}(X,E)$ の完備化を $W_s(E)=W_s(X,E)$ と書くと、0 以上の整数 k に対しては定義 *1.3* で定義された W_s と一致する。一般の整数 s に対しても $W_s(E)$ はヒルベルト空間となる。

補題 4.2. (1) h を T 上の周期的な C^{∞} 関数とする。$C^{\infty}(T,V)\to C^{\infty}(T,V): f\mapsto hf$ は $||*||_s^T$ ノルムに関して有界作用素である。従って $\mu_h: W_s(T,V)\to W_s(T,V): f\mapsto hf$ なる有界作用素として延長される。

(2) $h \in C^\infty(X)$ とすると、$C^\infty(X, E)$ 上で h を掛ける作用素は $||*||_s^T$ ノルムに関して有界作用素となる。従ってソボレフ空間の有界作用素 $W_s(X, E) \to W_s(X, E)$ として延長される。
(3) $P : C^\infty(T) \to C^\infty(T)$ を高々k 階の微分作用素とすると有界作用素 $P : W_{k+l} \to W_l$ に延長される。また X 上の C^∞ 切断の間の高々k 階の微分作用素とすると、$P : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ は有界作用素 $P : W_{k+l}(E) \to C_l(F)$ に延長される。

証明. (1) W_s における正規直交基底

$$b_\xi = \frac{\mathbf{e}(\xi x)}{(1 + ||\xi||^2)^{2/s}} \quad (\xi \in \mathbf{Z}^n)$$

を考える。$h = \sum_\eta \psi_\eta \mathbf{e}(\eta x)$ とフーリエ展開しておき h の掛け算作用 μ_h による b_ξ の像 hb_ξ のソボレフノルムを評価する。

$$\begin{aligned} ||hb_\xi||_s^2 &= \sum_\eta \frac{|\psi_\eta|^2}{(1 + ||\xi||^2)^s} ||\mathbf{e}(\eta x)\mathbf{e}(\xi x)||_s^2 \\ &= \sum_\eta \frac{|\psi_\eta|^2 (1 + ||\eta + \xi||^2)^s}{(1 + ||\xi||^2)^s} \\ &\leq \begin{cases} \sum_\eta |\psi_\eta|^2 (1 + ||\eta||^2)^s = ||h||_s^2 & (s > 0 \text{ のとき}) \\ \sum_\eta |\psi_\eta|^2 = ||h||_0^2 & (s \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

従って μ_h は有界作用素である。 □

命題 4.3 (レリッヒの定理). $W_{k+1}(X, E)$ の有界な無限列は $W_k(X, E)$ の中でコーシー部分列をもつ。

(2) これは *(1)* の帰結である。

(3) 一般の微分作用素は定数係数微分作用素を C^∞ 関数の積との合成に書けるので *(1)* と *(2)* からわかる。

証明. 有限開被覆 $\{V_i\}_{i \in I}$ に番号をつけて $I = \{1, \ldots, m\}$ とする。$\{f_p\}_p$ を $W_{k+1}(X, E)$ の有界無限列とする。命題4.2より $\mu_i : W_{k+1}(X, E) \to W_{k+1}(T, V) : f \mapsto \omega_i f$ は有界作用素なので、$\{\mu_i(f_p)\}_p$ は $W_{k+1}(T, V)$ の有界列となる。T に関するレリッヒの定理より、それぞれの i について $\{\mu_i(f_p)\}_p$ には $W_k(T, V)$ におけるコーシー部分列が存在する。部分列をとる操作を有限回繰り返し、対角線論法により、すべての $i = 1, \ldots, m$ に対して $W_k(T, V)$ におけるコーシー列となるような $\{\mu_i(f_p)\}_p$ の部分列 $\{\mu_i(g_q)\}_q$ がとれる。従って、このとき

$$||g_q - g_r||_k = \sum_{i \in I} ||\mu_i(g_q) - \mu_i(g_r)||_k^T$$

はコーシー列となる。 □

命題 4.4 (ソボレフの埋め込み定理). $l = [n/2]+1$ とする。このとき $W_{l+r}(X, E)$ の元 f に対して $C^r(X, E)$ の元 $\widehat{f}$ が存在して任意の $\eta \in C^\infty(X, E)$ に対して $(f - \widehat{f}, \eta) = 0$ となる。

証明. U_i に付随する 1 の分解 ρ_i を考える。$\mathrm{supp}(\rho_i) \subset U_i$ なので $\omega_i \rho_i = \rho_i$ となることに注意しよう。ν_i を

$$\nu_i : C^\infty(T, V) \to C^\infty(X, E) : g \mapsto \rho_i g$$

によって定義する。掛け算作用素が $|| * ||_k$ ノルムに関して有界作用素であることから ν_i は $\nu_i : W_{l+r}(T, V) \to W_{l+r}(X, E) : g \mapsto \rho_i g$ なる有界作用素に延長される。$f \in C^r(T, V)$ に対しては $\nu_i(f) = \rho_i(f)$ である。ρ_i は 1 の分解なので、$\sum_i \nu_i \mu_i(f) = f$ となる。いま $f \in W_{l+r}(X, E)$ とすると、T の場合のソボレフの埋め込み定理より $\widehat{f}_i \in C^r(T, V)$ が存在して任意の $\widehat{\eta} \in C^\infty(T, V)$ に対して $\langle \mu_i(f), \widehat{\eta} \rangle = \langle \widehat{f}_i, \widehat{\eta} \rangle$ となるものが存在する。そこで $\widehat{f} = \sum_i \rho_i \widehat{f}_i \in C^r(X, E)$ とおくと、$\eta \in C^\infty(X, E)$ に対して

$$\begin{aligned}\langle f, \eta \rangle &= \sum_i \langle \nu_i \mu_i(f), \eta \rangle = \sum_i \langle \mu_i(f), \nu_i \eta \rangle = \sum_i \langle \widehat{f}_i, \nu_i \eta \rangle \\ &= \sum_i \langle \nu_i \widehat{f}_i, \eta \rangle = \langle \sum_i \rho_i \widehat{f}_i, \eta \rangle = \langle \widehat{f}, \eta \rangle\end{aligned}$$

となり、定理を得る。 □

5. 楕円型評価

T^n 上の整数次数のソボレフ空間と定数係数偏微分作用素 P に関する楕円型評価についての次の命題を証明する。

命題 5.1. l を整数とする。$X = T^n, E = \mathbf{C}^r$ であり、P を k 階の定数係数楕円型偏微分作用素とすると、ある定数 c が存在して、任意の $u \in W(T)$ に対して楕円型評価

$$||u||_{l+k} < c(||P(u)||_l + ||u||_l) \tag{5.0.1}$$

が成り立つ。が成立する。

証明. フーリエ展開を考えると、微分作用素 P を施すことはフーリエ係数 a_ξ に P のシンボル ξ の多項式をかけることになり、その主要項は $\sigma_m(\xi)$ であることから導かれる。 □

それでは一般の多様体上の楕円型偏微分作用素に関する楕円型評価を証明しよう。

定理 5.2. $f \in C^\infty(X, E)$ に対して楕円型評価 *(1.3.3)* が成立する。

証明. $x \in X$ に対して $x \in U_i$ なる i を選びこれを $i(x)$ と書く。$P(x)$ を $V_{i(x)}$ における自明化による微分作用素において係数に x を代入して得られる定数係数偏微分作用素とする。このとき命題 5.1 より、$C_x > 0$ が存在して $f \in C^\infty(T_i, V)$ に対して

$$||f||_{k+l} \leq C_x(||P(x)f||_l + ||f||_l)$$

が成り立つ。さらにある x の $U_{i(x)}$ に含まれる近傍 U_x を十分小さく選べば、サポートが U_x に含まれれるような $f \in C^\infty(X, E)$ の元に対して

$$||(P(x) - P)f||_l \leq \frac{1}{2C_x} ||f||_{k+l}$$

となる。ここで U_x を k 個の有限被覆 $\{U_x\}_{x\in\Sigma}$ で置き換えて $C=\max_{x\in\Sigma} C_x$ とする。さらに ρ_x を有限被覆 $\{U_x\}$ に関する 1 の分解とする。ピーターポール不等式を用いて

$$||(P\rho_x-\rho_xP)f||_l \le \frac{1}{4kC}||f||_{k+l}+d||f||_l$$

が $f\in C^\infty(X,E)$ に対して成り立つように $d>0$ をとることができる。また ρ_x 倍作用は有界作用素なので任意の $f\in C^\infty(X,E)$ に対して

$$\sum_{x\in\Sigma}||\rho_x f||_l \le K||f||_l$$

が成り立つような $K>0$ が存在する。このとき

$$\begin{aligned}||\rho_x f||_{k+l} \le& C_x(||P(x)\rho_x f||_l+||\rho_x f||_l)\\ \le& C_x(||(P(x)-P)\rho_x f||_l+||(P\rho_x-\rho_xP)f||_l\\ &+||\rho_x Pf||_l+||\rho_x f||_l)\\ \le& C_x(\frac{1}{2C_x}||\rho_x f||_{k+l}+\frac{1}{4kC}||f||_{k+l}+d||f||_l+||\rho_xPf||_l+||\rho_xf||_l)\end{aligned}$$

この式を移項して 2 倍することにより

$$||\rho_x f||_{k+l} \le \frac{1}{2k}||f||_{k+l}+2C(||\rho_xPf||_l+||\rho_xf||_l)$$

という不等式が得られる。これを $x\in\Sigma$ について加えれば

$$\begin{aligned}||f||_{k+l} \le& \sum_{x\in\Sigma}||\rho_x f||_{k+l}\\ \le& \frac{1}{2}||f||_{k+l}+2C\sum_{x\in\Sigma}(||\rho_xPf||_l+||\rho_xf||_l)\\ \le& \frac{1}{2}||f||_{k+l}+2CK(||Pf||_l+||f||_l)\end{aligned}$$

となるので、不等式

$$||f||_{k+l}\le 4CK(||Pf||_l+||f||_l)$$

□

6. 楕円型偏微分方程式に関する正則性定理

ソボレフの埋め込み定理により、定理 1.7(1) を証明するためには命題 6.1 を証明すればよい。

命題 6.1. l を整数とする。f を $W_{k+l}(E)$ の元で $u=Pf$ が $W_{l+1}(E)$ の元であれば、f は $W_{k+l+1}(E)$ の元である。

証明. の証明] $f\in W_{k+l}(X,E)$, $u\in W_{l+1}(X,E)$ が $Pf=u$ を満たしていると仮定して $f\in W_{k+l+1}(X,E)$ を示そう。

$$P\omega_i f=(P\omega_i-\omega_iP)f+\omega_iPf=(P\omega_i-\omega_iP)f+\omega_iu$$

となり $(P\omega_i-\omega_iP)$ は $k-1$ 階の微分作用素となるので、$u_i=(P\omega_i-\omega_iP)f+\omega_iu\in W_{l+1}(T,V)$ となる。P を V_i に制限したものを T 上に楕円型偏微分作用

素に拡張したものを P_i と書く。$P_i : W_{k+l} \to W_l$ とソボレフ空間にも拡張しておく。$f_i = \omega_i f \in W_{k+l}(T, V)$ とおくと、

$$P_i f_i = u_i$$

という方程式を満たしている。T 上の関数 f に対して、平行移動作用素 $T^h(f)$ を $T^h(f)(x) = f(x+h)$ によって定め、微分作用素 P についてはその係数の関数に T^h を施したものとする。P_i に関する楕円型不等式から

$$\begin{aligned}
||T^h f_i - f_i||_{k+l} \leq & C(||P_i(T^h f_i - f_i)||_l + ||T^h f_i - f_i||_l) \\
\leq & C(||(P_i - T^h P_i)(T^h f_i) + T^h(P f_i) - P f_i||_l \\
& \quad + ||T^h f_i - f_i||_l) \\
\leq & C(||(P_i - T^h P_i)(T^h f_i)||_l + ||T^h(P f_i) - P f_i||_l + ||T^h f_i - f_i||_l) \\
\leq & C(||(T^{-h} P_i - P_i)(f_i)||_l + ||T^h u_i - u_i||_l + ||T^h f_i - f_i||_l)
\end{aligned}$$

ここで

$$\frac{1}{h}(T^{-h} P_i - P_i) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(h, x) D_\alpha$$

とおくと $a_\alpha(h, x)$ は C^∞ 関数となる。したがって $f_i \in W_{k+l}(T, V)$ なので、$\dfrac{1}{h}||(T^{-h} P_i - P_i)(f_i))||_l$ は $h \to 0$ で有界である。また $u_i \in W_{l+1}(T, V)$ なので $\dfrac{1}{h}||T^h u_i - u_i||_l$ は $h \to 0$ で有界になる。従って $\dfrac{1}{h}||T^h(f_i) - f_i||_{k+l}$ は $h \to 0$ で有界となり、$f_i \in W_{k+l+1}(T, V)$ となる。 □

定理 1.7(2) の証明の前にソボレフ空間と内積 $\langle *, * \rangle$ に関する次の補題が必要となる。

命題 6.2. *(1.1.2)* で定まる内積 $\langle *, * \rangle$ は $W_k \times W_{-k} \to \mathbf{C}$ に延長され、第一変数、第二変数に関して連続である。さらに $y \in W_{-k}$ とするとき、任意の $x \in W_k(E)$ に対して $\langle x, y \rangle = 0$ であれば、$y = 0$ となる。

証明. トーラスの場合に帰着する。トーラスの場合は

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x||_k \cdot ||y||_{-k}$$

であることがシュワルツの不等式

$$\left| \sum_\xi \varphi_\xi \overline{\psi_\xi} \right|^2 \leq \left(\sum_\xi (1 + ||\xi||^2)^k |\varphi_\xi|^2 \right) \left(\sum_\xi (1 + ||\xi||^2)^{-k} |\psi_\xi|^2 \right)$$

より得られる。 □

命題 *1.7 (2)* の証明. $\alpha \in W_0(E), \beta \in W_0(F)$ とし、任意の $x \in C^\infty(E)$ に対して $(x, \alpha) + (P(x), \beta) = 0$ とする。さらに $\alpha_n \xrightarrow{W_0} \alpha, \beta_n \xrightarrow{W_0} \beta$ となる $\alpha_n \in C^\infty(E), \beta_n \in C^\infty(F)$ をとる。この時

$$(x, \alpha_n) + (P(x), \beta_n) = (x, \alpha_n) + (x, P^*(\beta_n)) = (x, \alpha_n + P^*(\beta_n))$$

となるので $(x, \alpha_n + P^*(\beta_n)) \to 0$. 他方 $P^*(\beta_n) \xrightarrow{W_{-k}} P^*(\beta)$ なので、

$$W_k \times W_{-k} \to \mathbf{C} : (x, y) \mapsto \langle *, * \rangle$$

は二つ目の変数について連続で $\alpha_n + P^*(\beta_n) \xrightarrow{W_{-k}} \alpha + P^*(\beta)$ なので、$(x, \alpha + P^*(\beta)) = 0$ となる。ここで $x \in C^\infty$ は任意であったことと C^∞ が $W_k(E)$ で稠密であることに注意すると、$\alpha + P^*(\beta) = 0$ となる。ここで命題 6.1 を用いれば、$\beta \in W_k$ であることがわかる。 $\square$