数学 II 演習

2007 年 10 月 20 日 担当：寺杣友秀

公理 0.1. V に和とスカラー倍が定義されているとき、ベクトル空間になるための条件は次の８つの条件である。

(1) $v_1, v_2 \in V$ に対して $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.
(2) $v_1, v_2, v_3 \in V$ に対して $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$.
(3) $0 \in V$ なる元が存在して $v \in V$ に対して $v + 0 = v$.
(4) $v \in V$ に対して $-v \in V$ なる元が存在して $v + (-v) = 0$.
(5) $v \in V$ に対して $1 \cdot v = v$.
(6) $v_1, v_2 \in V$,$r \in \mathbf{R}$ に対して $r \cdot (v_1 + v_2) = r \cdot v_1 + r \cdot v_2$.
(7) $v \in V$,$r_1, r_2 \in \mathbf{R}$ に対して $(r_1 + r_2) \cdot v = r_1 \cdot v + r_2 \cdot v$.
(8) $v \in V$,$r_1, r_2 \in \mathbf{R}$ に対して $r_1 \cdot (r_2 \cdot v) = (r_1 r_2) \cdot v$.

公理 0.2. V, W をベクトル空間とする。$f : V \to W$ が線型写像であるとは、次の条件をみたすことである。

(1) $v_1, v_2 \in V$ に対して $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$.
(2) $v \in V, r \in \mathbf{R}$ に対して $f(rv) = rf(v)$.

1. (1) A を $(n \times m)$ 行列とする。

$$V = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n \mid Ax = 0\}$$

とおくとき、これは $\mathbf{R}^n$ における和とスカラー倍により閉じている事をしめせ。

(2) $v_1, \ldots, v_k$ を $\mathbf{R}^n$ の元とする。

$$V = \{r_1 v_1 + \cdots + r_k v_k \mid r_1, \cdots, r_k \in \mathbf{R}\}$$

とおくとき、これは $\mathbf{R}^n$ における和とスカラー倍により閉じている事をしめせ。

2. f を $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への写像で

$$f(x, y) = (2x + y + 1, x + 2y + 1)$$

によって定まるものとする。この f は線型写像か？

3. $\mathbf{R}^3$ から $\mathbf{R}^4$ への線型写像 f がある。f が

$$f((1,4,2)) = (2,-1,4,2), \quad f((-1,2,-3)) = (3,2,-1,1),$$
$$f((3,-1,1)) = (4,-1,-2,1)$$

を満たすとき、f を行列表示せよ。

また $f((3,-2,4))$ を求めよ。

4. 次のベクトルの集合 S は一独立かどうか答えよ。一次独立であれば証明をし、そうでなければ自明でない関係式をひとつあげよ。

$$S = \{\left(3,1,2,-1\right), \left(-1,2,3,1\right), \left(2,-1,1,3\right), \left(6,-2,0,1\right)\}$$