数学 II 演習

2008 年 11 月 10 日 担当：寺杣友秀

1. 4×5 実行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 2 & 12 & 16 \\ 2 & -2 & -1 & 10 & -3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & -11 & -3 & 5 & -20 \end{pmatrix}$$

とする。$\mathbf{R}^5$ から $\mathbf{R}^4$ への線型写像 f を $x \in \mathbf{R}^5$ に対して

$$f(x) = Ax$$

を対応させる写像として定める。このとき V を

$$V = \{x \in \mathbf{R}^4 \mid f(x) = 0\}$$

によって定まるベクトル空間とする。ただし、ここで $\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^5$ は実列ベクトル空間とする。V は f の核と呼ばれる。

(1)$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ とおくとき、$x_1, \ldots, x_5$ に関する連立一次方程式 $f(x) = 0$ の一般解を求めよ。

(2) V の基底を求めよ。答えだけでなく、V の生成系となっていること、一次独立性を確かめること。

2. $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線型写像 f に対して

$$W = \{f(x) \mid x \in \mathbf{R}^n\}$$

なるベクトル空間 W は f の像とよばれる。問題 1 の f の像の基底を求めたい。次の問いに答えよ。

(1) 問題 1 で与えられた行列 $A = (a_1, \ldots, a_5)$ と列ベクトルに分解する。このとき f の像は 5 つの列ベクトル $a_1, \ldots, a_5$ で生成された $\mathbf{R}^4$ の部分空間と一致することを示せ。

(2)A に列基本変形のうちの一つを施したものを A' として $A' = (a'_1, \ldots, a'_5)$ とおく。このとき $a_1, \ldots, a_5$ で生成された部分空間と $a'_1, \ldots, a'_5$ で生成された部分空間は一致することを示せ。

(3)A に列基本変形を施すことにより f の像の基底を求めよ。その一次独立性、像を生成することを確かめよ。

(4) 上の (3) と問題 1 の基底の個数を比べてみて、次元定理とあっているかを確かめよ。