数学 II 演習問題

2013 年 11 月 12 日　担当：寺杣友秀

1. 次のベクトルの集合は一次独立か？

$$(1)\quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\10\\11\\12\end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\9\\16\end{pmatrix}$$

2. 次のベクトルの集合は生成系か。

$$(1)\quad \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\13\\-5\end{pmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

3. 次のベクトルの集合が基底となるための t の条件を求めよ。

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2t\\2\\t\end{pmatrix},$$

4. (2,2) 行列 A を $A = \begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 4\end{pmatrix}$ とおき、$V = W = \mathbf{R}^2$ とする。$f : V \to W$ を $f(v) = Av$ で与えられる線形写像とする。V の基底として $v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ をとり W の基底として $w_1 = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ をとったとき、これらの基底に関する f の行列表示を求めよ。

5. $V = \{f(x) \mid f(x)$ は 3 次以下の多項式 $\}$ とするとき V の元 $f(x)$ に対して $f(x) - xf(x)'$ を対応させる g は線形写像であることを示せ。また $1, x, x^2, x^3$ なる基底に関して g を行列表示せよ。

6. 次の行列で定義される線形写像の像と核の基底をもとめよ。

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\3 & 2 & -2 & 1\\3 & 6 & 2 & 2\\1 & -1 & -2 & -2\end{pmatrix}$$

7. 次の非斉次連立一次方程式の解の集合を求めよ。

$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z + w & = 1 \\ x + 2y + z + 2w & = 2 \\ 3x + y + 2z + 3w & = 1 \end{cases}$$

8. (1) $V = \{f(x) \mid f(x)$ は 3 次以下の多項式 $\}$ はベクトル空間となる。このとき $W = \{f(x) \in V \mid f(2) = 0\}$ は部分ベクトル空間となることを示せ。また W の基底を求めよ。

(2) V を上の問題で定義されるベクトル空間とする。V の元 $f(x)$ に対して多項式 $f(x)' - f(0)$ を対応させる写像 g は線形写像であることを示せ。また g の核の基底および像の基底を求めよ。