

数学 II 演習問題

2013 年 11 月 26 日 担当：寺杉友秀

1. 行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 \\ -6 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ について答えよ。

- (1) A の固有値とそのそれぞれに属する固有ベクトルをひとつ求めよ。
- (2) A を対角化せよ。
- (3) A^n を求めよ。

2. 行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ について答えよ。

- (1) A の固有値とその重複度を求めよ。
- (2) 固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ とするとき $i = 1, \dots, k$ に対して、 $\ker(A - \lambda_i I_3)$ の基底を求めよ。
- (3) A は対角化できるか。できれば対角化せよ。

3. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & -5 \end{pmatrix}$ について答えよ。

- (1) A の固有値とその重複度を求めよ。
- (2) 固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ とするとき $i = 1, \dots, k$ に対して、 $\ker(A - \lambda_i I_3)$ の基底を求めよ。
- (3) A は対角化できるか。できれば対角化せよ。

4. θ を $0 < \theta < 2\pi$ となる実数として、 $R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ とする。

- (1) R を複素係数行列と考えて、固有値を求めよ。またそのそれぞれに属する固有ベクトルをもとめよ。
- (2) R を対角化せよ。

5. 数列 $\{a_n\}_{n=0,1,\dots}, \{b_n\}_{n=0,1,\dots}$ が次の関係式を満たしているとする。

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$$

- (1) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ を満たすように、 A を定めよ。
- (2) A を対角化せよ。
- (3) A^n を求めよ。
- (4) $a_0 = 2, b_0 = 3$ とするとき、 a_n, b_n を求めよ。

6. V を 2 次以下の多項式からなるベクトル空間とする。 V の元 $f(x)$ に対して V の元 $x(f(x+1) - f(x))$ を対応させる線形写像を G とする。このとき G の固有値とそれぞれの固有値に対する固有ベクトルを求めよ。