線形代数

寺杣友秀

Contents

1. 平面ベクトル、空間ベクトル、複素数

この章では高校で習ったベクトルに関する事実を補足する。

1.1. 集合の記号.

1.1.1. 属する、含まれる. 集合の記号に慣れておくことは、大学において数学を学ぶ上で大切なことである。数学でいう集合とは数学的な物の集まりのことである。たとえば $1, 2, 3$ という数の集まりは集合の例である。これを $\{1, 2, 3\}$ とあらわす。もう少し正確に言うならば、S が集合であるとするなば、x は S に属しているかいないかが決まっていることが要請される。例えば $S = \{1, 2, 3\}$ とすると 1 は S に属するし 4 や 3.5 は属していない。S に属しているものは $1, 2, 3$ だけである。$\{1, 2\}$ は含まれてはいるけれど属てはいない。ここで属しているという言葉を使って、入っているという言葉を使わなかったのは含まれる、と属するの違いをはっきり意識するためである。属するということは、時に元であるという言い方もする。x が S に属するとき $x \in S$ と書きそうでないとき $x \notin S$ とかく。また T が S に含まれるとは $x \in T$ ならば $x \in S$ が成り立つときのことをいう。したがって $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ ではあるが $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$ ではない。つまり $\{1, 2\} \notin \{1, 2, 3\}$ である。でも、しばらくはこのようなややこしい使い方はなるべくしないようにするのであまり神経質にならなくてもよい。

S が集合であるためには S に属する元がどういうものかを定めればよいので、集合 S に入るための条件を書く事により定めることもできる。そのときの記法として

$$S = \{x \mid x \text{ に関する条件 }\}$$

という様に書く。右側の条件が満たされていれば S の元であるし、そうでなければ S の元でない。

$$S = \{x \mid x \in T \text{ であって } x \text{ に関する条件 } C(x) \text{ を満たす }\}$$

は単純化して

$$S = \{x \in T \mid \text{条件 } C(x) \text{ を満たす }\}$$

とも書かれる。よく使われる集合の記号をここで挙げる。

(1) $\mathbf{N}$ = 自然数の集合 $= \{1, 2, 3, \ldots\}$. $\mathbf{Z}$=整数の集合
(2) $\mathbf{R}$ = 実数全体の集合、$\mathbf{C}$ = 複素数全体の集合

例えば $z \in \mathbf{Z}$ と書けば、z が自然数であることを意味する。$S \subset T$ となるとき S は T の部分集合であるという。ひとつも元のない集合も集合、つまり $\{\}$ も集合として考えるのが合理てきである。これを空集合といい $\emptyset$ と表す。$\{\} \subset T$ は常に正しい。

1.1.2. 論理について. この講義では「命題」といった時、二つの意味で使われる。一般に「命題」とはそれが「真」であるか「偽」であるかどちらかであることが、はっきりしているものである。従って「あしたの空は青っぽい」というのは「青っぽい」というものが数学的にきちんと定義されない限り命題とはいえない。そういうものも今後数学の対象に入り得るかもしれないが、この講義ではそれは対象外である。命題によっては「真」または「偽」のどちらかは成り立っているけれども、どちらからはわからない（リーマン予想のように、いまのところすべての人類にとって）というものもある。

命題 1.1 等と書かれるものは論理的には「定理」と同じ意味であるが定理に比べると重要性は低いものである。「定理」と「命題」、「系」、「補題」はその重要性に差があるものの、論理的には「定理」と同じで定義から出発して証明できる正しい「命題」のことである。

A, B を二つの命題とするとき「A ならば B である」とは

$$(A\text{ でない})\text{ または }(B\text{ である})$$

と同値である。例えば「風が吹」ば「桶やが儲かる」というのは

(1) 「風が吹く」=yes、「桶やが儲かる」=yes である、あるいは
(2) 「風が吹く」=no

のいずれかが成立することである。つまり除外される場合は

「風が吹く」=yes、「桶やが儲かる」=no

の場合だけである。つまり A が「偽」であれば、常に「A ならば B である」は正しいことになる。

時に「A ならば B である」と言われた時に、「えっ？A が成り立たつことはないんじゃないの？」という反応をしてまうかもしれないが、気をつけよう。次の命題は正しいだろうか？

実数 x について「$x^2+1=0$ ならば $x=1$」である。

英語の否定疑問文の時に、日本人が、「そうです」というつもりで、つい「Yes」といってしまういがちだが、それと同じで慣れの問題である。

1.2. 平面と空間のベクトル.

1.2.1. 平面ベクトルと 2 次元数ベクトル. 平面のベクトルとは幾何学的に終点と始点の組で図のように平行移動して重なり合うときに同じものとみなしたものとして定義される。これを図形的には図のように矢印を用いて表す。ベクトルには向きと長さがある。こうすると座標を使わなくても平面ベクトルは定義はできるが、座標をひとつ決めると数ベクトルで扱うことができ便利である。ベクトルの始点を原点に移動すると、終点の座標 (x, y) を考えることにより二つの実数の組 (x, y) が得られる。逆に二つの数の組 (x, y) が与えられると原点を始点として (x, y) で定まる点を終点とするベクトルが定まる。この対応で 2 次元の数ベクトル (x, y) の集合と平面のベクトルの集合には 1 対 1 の対応が存在する。始点と終点の一致する平面ベクトルはすべて同じベクトルでこれを 0 ベクトルといい $\mathbf{0}$ であらわす。上の対応で 0 ベクトルに対応する数ベクトルは $(0, 0)$ である。

定義 1.1. (1) 二つ（三つ）の実数の組 (x, y)（(x, y, z)）を 2 次元（3 次元）の数ベクトルという。
(2) 2 次元（3 次元）の数ベクトル全体の集合を $\mathbf{R}^2$（$\mathbf{R}^3$）と書く。すなわち

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}, \quad \mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbf{R}\}$$

である。

空間のベクトルも同様に定義できる。このとき上と同様にして 3 次元の数ベクトル (x, y, z) の集合と空間のベクトルの集合には 1 対 1 の対応が存在する。

定義 1.2. (1) v を平面ベクトルとするとき上の対応で (x, y) に対応するとき (x, y) を v の成分表示という。
(2) 同様にして空間ベクトル v に対応する３次元の数ベクトル (x, y, z) を v の成分表示という。
(3) 平面上（空間内）の一点 P に対して原点を始点として P を終点とするベクトル $\overrightarrow{OP}$ を対応させることにより平面上（空間内）の点の集合と平面（空間）ベクトルの集合は一対一に対応する。$\overrightarrow{OP}$ を P の位置ベクトルという。

1.2.2. ベクトルの算法と性質. 平面ベクトル全体の集合には次のようにして、和とスカラー倍が定義される。

（１）ベクトルの和 v_1, v_2 を二つの平面ベクトルとする。このとき v_2 を平行移動して v_1 の終点と v_2 の始点が重なるようにもっていく。このとき v_1 の始点を始点として、v_2 の終点を終点とするベクトルが定まる。この結果得られるベクトルは v_1 や v_2 を平行移動してものを使って定めても、得られた結果は平行移動の差を除けば、同じものである。こうして得られるベクトルを v_1 と v_2 の和といい $v_1 + v_2$ と書く。

（２）ベクトルのスカラー倍 v を平面ベクトルとして r を実数とする。このとき v の r 倍を次のように定義する。

(1) $r > 0$ のとき、rv を、v とおなじ向きで長さが r 倍となっているベクトルとして定義する。
(2) $r < 0$ のとき、rv を、v と逆向きで長さが $\mid r \mid$ 倍となっているベクトルとして定義する。
(3) $r = 0$ のときは rv は 0 ベクトルとして定義する。

これら和とスカラー倍が成分表示をしたとき対応する算法は次のように与えられる。

（１）ベクトルの和 v_1, v_2 を平面ベクトルとしてそれぞれの成分表示を $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ とすると、$v_1 + v_2$ の成分表示は $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ となる。

（２）ベクトルのスカラー倍 v を平面ベクトルとしてその成分表示を (x, y) とする。さらに r を実数とする。このときベクトル v の r 倍 rv の成分表示は (rx, ry) となる。

定義 1.3. v と大きさが同じで向きが逆のベクトルを逆ベクトルといい、$-v$ と書く。v の成分表示を (x, y) とすると $-v$ の成分表示は $(-x, -y)$ である。これは上のスカラー倍を用いれば $(-1)v$ とも書ける。

次の性質は演算を成分表示で表せば、実数の性質に帰着できるので、証明は省略する。

命題 1.4. v_1, v_2, v_3 を平面ベクトル r, s を実数とするとき

(1) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$.
(2) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$.
(3) $v_1 + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v_1$.
(4) $v_1 + (-v_1) = \mathbf{0}$.
(5) $1v_1 = v_1$.
(6) $r(sv_1) = (rs)v_1$.

(7) $(r+s)v_1 = rv_1 + sv_1$.
(8) $r(v_1+v_2) = rv_1 + rv_2$.

1.3. ベクトルの長さ、内積.

1.3.1. ベクトルの長さ. 平面ベクトル v の長さを $\|v\|$ と表す。v の成分表示を (x,y) とすると三平方の定理から

$$\|v\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

となる。空間ベクトルについても同様に v の成分表示を (x,y,z) とすると v の長さは

$$\|v\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

となる。r を実数とすると

$$\|rv\| =| r | \cdot \|v\|$$

となる。

1.3.2. ベクトルの内積（平面ベクトルの場合）. v_1, v_2 を平面ベクトルとする。v_1 と v_2 のなす角を θ とする。このとき

定義 1.5. v_1 と v_2 の内積 $(v_2, v_2) \in \mathbf{R}$ を

$$(v_1, v_2) = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \cos(\theta) \tag{1.1}$$

によって定義する。

命題 1.6. v_1, v_2 を平面ベクトルとし、それぞれの成分表示を $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ とする。このとき、

$$(v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2$$

となる。

証明. $v_1 = \mathbf{0}$ または $v_2 = \mathbf{0}$ のときは明らかに成立するので、$v_1 \neq \mathbf{0}, v_2 \neq \mathbf{0}$ として証明する。以下、線分 OP_1 の長さを $\overline{OP_1}$ とあらわす。v_1, v_2 の始点を原点にとると、その終点 P_1, P_2 の座標は $(x_1,y_2),(x_2,y_2)$ となる。ここで第 2 余弦定理を三角形 OP_1P_2 に対して用いれば、

$$2\cos(\theta) \cdot \|v_1\| \cdot \|v_2\| = \overline{OP_1}^2 + \overline{OP_2}^2 - \overline{P_1P_2}^2 \tag{1.2}$$

となるが、

$$\overline{OP_1}^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad \overline{OP_1}^2 = x_2^2 + y_2^2, \quad \overline{P_1P_2}^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$

なので式 (1.2) は

$$\begin{aligned}&(x_1^2+y_1^2) + (x_1^2+y_1^2) - \big((x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2\big) \\ =&2(x_1x_2 + y_1y_2)\end{aligned} \tag{1.3}$$

となる従って上の等式の辺々を 2 で割ると、内積の定義を用いて命題を得る。 □

内積の定義と成分表示による表現を用いれば次は容易に証明できる。

命題 1.7. v_1, v_2, v_3 を平面ベクトル、r を実数とする。

(1) $(v_1, v_2) = 0$ であることは $v_1 = \mathbf{0}$、または $v_2 = \mathbf{0}$、または v_1 と v_2 のなす角が $\dfrac{\pi}{2}$、すなわち v_1, v_2 が直交していることである。
(2) $(v_1, v_1) = \|v_1\|^2$.
(3) $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$.
(4) $(v_1 + v_2, v_3) = (v_1, v_3) + (v_2, v_3)$.
(5) $(rv_1, v_2) = r(v_1, v_2)$.

1.3.3. ベクトルの内積（空間ベクトルの場合）. 空間ベクトルの場合も平面ベクトルと同様に内積が定義される。まず、v_1, v_2 をともに $\mathbf{0}$ ではない空間ベクトルとするとき v_1 と v_2 のなす角が次のようにして定まる。まず、空間内にひとつ原点 O をとり、v_1, v_2 の始点を原点にとる。v_1, v_2 が平行のときはそのなす角は 0 であると定め、平行でないときは v_1, v_2 を含む平面 H が決まるので、それらのなす角 θ を、H 内で v_1, v_2 のなす角として定める。このとき v_1,v_2 の内積 (v_1, v_2) を (1.1) と同じ式で定義する。このとき v_1, v_2 の終点を P_1, P_2 とすると、三角形 OP_1P_2 は H に含まれる三角形なので第二余弦定理より (1.2) が成り立つ。従って v_1, v_2 の成分表示を $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ とすると (1.3) と同様にして

$$
\begin{aligned}
&2(v_1, v_2) \\
=&(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right) \\
=&2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)
\end{aligned}
$$

が得られる。従って

命題 1.8. v_1, v_2 を平面ベクトルとし、それぞれの成分表示を $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ とする。このとき、

$$(v_1, v_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

となる。また命題 *1.7* が空間ベクトルについても成立する。

1.4. **直線の方程式、空間の方程式.**

1.4.1. 平面内の直線の方程式、空間内の平面の方程式. 座標平面内の直線（座標空間内の平面）の方程式を求めよう。考える直線 l（平面 H）が点 $P_0 = (p, q)$ $(P_0 = (p, q, r))$ が通るとする。さらに、直線に垂直な $\mathbf{0}$ でない、ベクトルを一つとり、それを $v = (a, b)$ $(v = (a, b, c))$ とおく。このベクトルを直線 l（平面 H）の法線ベクトルという。このとき直線上の点 (平面上の点)P のを考え、その座標が (x, y) $((x, y, z)$ で与えられているとする。P の位置ベクトルを $p = \overrightarrow{OP}$、P_0 の位置ベクトルを $p_0 = \overrightarrow{OP}$、とおく。このときベクトル $p - p_0 = P_0P$ は平面に含まれるベクトルなので $\mathbf{0}$ であるか、または v と直交する。従って $(p - p_0, v) = 0$ を満たす。この式を成分表示で書けば、

(1.4) $a(x-p) + b(y-q) = 0$ （あるいは $a(x-p) + b(y-q) + c(z-r) = 0$）

と書ける。これが平面内の直線 l あるいは空間内の平面 H の方程式である。

これまでのところをまとめて次の定理を得る。

定理 1.9. (1) $v = (a, b)$ に垂直で (p, q) を通る平面内の直線の方程式は

$$a(x - q) + b(y - q) = 0$$

で与えられる。あるいは x, y についてまとめて、$ax+by+c=0$（$(a,b)\neq\mathbf{0}$）は直線の方程式である。

(2) $v=(a,b,c)$ に垂直で (p,q,r) を通る平面内の直線の方程式は

$$a(x-q)+b(y-q)+c(z-r)=0$$

で与えられる。あるいは x, y, z についてまとめて、$ax+by+c+d=0$（$(a,b,c)\neq\mathbf{0}$）は直線の方程式である。

1.4.2. 空間内の直線の方程式. 座標空間内の直線で点 (p,q,r) を通り、ベクトル $(a,b,c)(\neq\mathbf{0})$ に平行は直線の方程式を求めてみよう。直線上の点 P は (p,q,r) を (a,b,c) の実数 t 倍だけ平行移動したところにあるので、その点の位置ベクトル $u=(X,Y,Z)$ は

$$u=(x,y,z)=(p,q,r)+t(a,b,c)=(p+ta,q+tb,r+tc)$$

となるので、

$$x=p+ta,\quad y=q+tb,\quad z=r+tc \tag{1.5}$$

ここで t は自由に動くパラメータである。これから t を消去すれば直線の方程式がえられる。$(a,b,c)\neq\mathbf{0}$ なので例えば $a\neq 0$ であれば、始めの式から t について解いて、

$$t=\frac{x-p}{a}$$

として、二つ目と三つ目の式の t に代入すれば、二つの方程式の連立方程式として直線の方程式が得られる。$abc\neq 0$ であれば、(1.5) の三つの式をすべて t について解いて等値して t を忘れれば、

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-r}{c}(=t)$$

となりやはり二つの方程式の連立方程式の形に直線は表される。二つの方程式が必要となる直感的な理由は空間で３次元の中にある１次元の対象物定めるのに二つの束縛条件をつけなければ次元が二つ下がらないからだ。

1.4.3. 点と平面内の直線、空間内の平面との距離. 座標空間内の $ax+by+cz+d=0$（$(a,b,c)\neq\mathbf{0}$）で定義される平面 H と点 $P=(p,q,r)$ の距離を求めてみよう。平面 H の法線のとして $v=(a,b,c)$ がとることができるので、点 P を通り v と平行な直線 l は P の位置ベクトルを同じ $\mathbf{p}$ で表して、実数 t を用いて $u=\mathbf{p}+tv$ と表すことができる。u が平面 H に乗っている条件を書くと、

$$a(p+ta)+b(q+tb)+c(r+tc)+d=0$$

となるので t について解けば、

$$t=-\frac{ap+bq+cr+d}{a^2+b^2+c^2}$$

となる。従って P と平面 H の距離は tv の長さと等しく、$\|tv\|$ は

$$\begin{aligned}\|tv\|=&\frac{|\ ap+bq+cr+d\ |}{a^2+b^2+c^2}\|v\|\\ =&\frac{|\ ap+bq+cr+d\ |}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\end{aligned}$$

以上まとめて、

命題 1.10. 空間内の点 $P=(p,q,r)$ から $ax+by+cz+d=0$ で定義される平面 H までの距離は

$$\frac{|\ ap+bq+cr+d\ |}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

で与えられる。

平面内の点と直線の距離も同様にして次の定理が示される。

命題 1.11. 平面内の点 $P=(p,q)$ から $ax+by+c=0$ で定義される直線 l までの距離は

$$\frac{|\ ap+bq+c\ |}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

で与えられる。

1.5. **複素数.**

1.5.1. 複素数の演算の定義と性質. 複素数は歴史的には 2 次方程式の解を解くときに解の存在をより広い範囲で保証するために生まれたものであるが、定義をするという観点から言えば、形式的に $\mathbf{i}$ というシンボルを導入して、$x+y\mathbf{i}$ なる形のものを考えることにすればよい。複素数の定義をしよう。

定義 1.12. (1) 形式的に二つの実数 x,y を用いて $z=x+y\mathbf{i}$ の形のものを複素数という。このとき x,y をそれぞれ z の実部、虚部という。
(2) （複素数の和）二つの複素数 $z_1=x_1+y_1\mathbf{i}, z_2=x_2+y_2\mathbf{i}$ の和 z_1+z_2 を $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)\mathbf{i}$ と定義する。これは再び複素数である。
(3) （複素数の積）二つの複素数 $z_1=x_1+y_1\mathbf{i}, z_2=x_2+y_2\mathbf{i}$ の積 z_1z_2 を $(x_1x_1-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)\mathbf{i}$ と定義する。これは再び複素数である。
(4) *(*前にも述べたがもう一度*)* 複素数全体の集合を $\mathbf{C}$ と書く。すなわち、

$$\mathbf{C}=\{x+y\mathbf{i}\mid a,b\in\mathbf{R}\}$$

注意 1.13. (1) 実数 x は $x+0\mathbf{i}$ と同一視することにより複素数とみることができ、上の実数の加法、乗法は複素数として考えたものと一致する。
(2) $\mathbf{i}^2=-1$ が成立する。

次の性質は容易にチェックできる。

命題 1.14. z_1,z_2,z_3 を複素数とする。
(1) $z_1+z_2=z_2+z_1$, $z_1z_2=z_2z_1$
(2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$, $(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3)$
(3) $z_1+0=z_1$, $1z_1=z_1$,
(4) $(z_1+z_2)z_3=z_1z_3+z_2z_3$.

定義 1.15. (1) $z=a+b\mathbf{i}$ とするとき、$\overline{z}=a-b\mathbf{i}$ を z の共役複素数（あるいは単に共役）という。
(2) z を複素数とする。$wz=zw=1$ を満たす元 w を z の逆元という。

命題 1.16. (1) z_1,z_2 を複素数とすると、$\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1z_2}$ が成り立つ。

(2) z を複素数とすると、$z\overline{z}$ は 0 以上の実数となり、$z=0$ のときにのみ $z\overline{z}=0$ となる。
(3) 0 でない複素数には逆元が一意的に存在する。

証明.（1）は定義に従って辺々を計算することによりできる。（2）$z=a+b\mathbf{i}$ とすると、$z\overline{z}=a^2+b^2$ なので常に 0 以上であり 0 であることと $(a,b)=(0,0)$ が同値となる。（3）$z\neq 0$ とすると $z\overline{z}\neq 0$ なので w を

$$w=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}$$

とおけばこれが逆元となる。ここで分母に現れるのものは 0 でない実数であることに注意しよう。もし w' も z の逆元であったとすれば、

$$w'=w'1=w'(zw)=(w'z)w=1w=w$$

となり $w=w'$ がいえる。 □

定義 1.17. $z=x+y\mathbf{i}\in\mathbf{C}$ とする。$\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$ を z の絶対値といい $\mid z\mid$ と書く。上の命題より、$\mid z\mid=0$ と $z=0$ は同値となる。

練習問題 1.18. z,w を二つの複素数とするとき $\mid z+w\mid\leq\mid z\mid+\mid w\mid$ を示せ。

1.5.2. 複素平面、極形式、ドモアブルの定理. $z=x+y\mathbf{i}$ に対して平面上の一点 (x,y) を対応させることにより複素数全体の集合と平面内の点の集合は一対一に対応する。このように複素数を平面の点としてあらわすとき、平面全体を複素平面という。x-座標（y-座標）は対応する複素数の実部（虚部）をあらわすので x-軸（y-軸）を実軸、（虚軸）という。z を 0 でない複素数とする。対応する複素平面上の一点を同じく z であらわすと、z は

(1) z と原点との距離 $r=\mid z\mid$ と
(2) 実軸の正の部分と 0 と z を結んでできる半直線のなす角 θ

によって一意的に定まる。r は絶対値となる。θ を z の偏角といい $\arg(z)$ と書く。偏角は一般角で考えるので、2π の整数倍の差を除いてのみ決まるものである。絶対値と偏角を用いて z は

$$z=r(\cos(\theta)+\mathbf{i}\sin(\theta))$$

と書ける。この形の表記を極形式という。極形式は複素数の積に関して次のように、よい振る舞いをする。

定理 1.19. $z_1=r_1(\cos(\theta_1)+\mathbf{i}\sin(\theta_1)),\ z_2=r_2(\cos(\theta_2)+\mathbf{i}\sin(\theta_2))$ とすると

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathbf{i}\sin(\theta_1+\theta_2))$$

となる。言い換えれば、

(1) $\mid z_1z_2\mid=\mid z_1\mid\mid z_2\mid$
(2) $\arg(z_1z_2)=\arg(z_1)\arg(z_2)$

が成り立つ。ただし (2) の等式は 2π の整数倍の差を除いて成り立つ等式である。

証明. 定理のように極形式に表しておいて計算する。

$$
\begin{aligned}
z_1z_2 =& r_1r_2(\cos(\theta_1)+\mathbf{i}\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2)+\mathbf{i}\sin(\theta_2))\\
=& r_1r_2\Big[(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)-\sin(\theta_1)\sin(\theta_2))\\
&+\mathbf{i}(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2)+\sin(\theta_1)\cos(\theta_2))\Big]\\
=& r_1r_2\big(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathbf{i}\sin(\theta_1+\theta_2)\big)
\end{aligned}
$$

ここで 2 行目、3 行目と 4 行目の間の等式は三角関数の加法定理を用いた。 □

n を自然数とするとき

$$z^n = \underbrace{z\cdots z}_{n}$$

とおく。さらに $z \neq 0$ のとき、負の整数 n に対して $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}}$、$z^0 = 1$ とおく。

系 1.20 (ドモアブルの定理)**.** 0 でない複素数 z を $z = r(\cos(\theta_1)+\mathbf{i}\sin(\theta_1))$ と表す。このとき整数 n に対して

$$z^n = r^n(\cos(n\theta_1)+\mathbf{i}\sin(n\theta_1)) \tag{1.6}$$

証明. n が自然数のときは、n に関する帰納法で証明できる。さらに

$$
\begin{aligned}
&\Big[r^n(\cos(n\theta_1)+\mathbf{i}\sin(n\theta_1))\Big]\Big[r^{-n}(\cos(-n\theta_1)+\mathbf{i}\sin(-n\theta_1))\Big]\\
=&(\cos(n\theta_1-n\theta_1)+\mathbf{i}\sin(n\theta_1-n\theta_1)) = 1
\end{aligned}
$$

となることから n が負の整数のときも成立する。$n=0$ の時は等式 (1.6) の右辺、左辺ともに 1 となる。 □

練習問題 1.21. $z^n = 1$ となる複素数 z をすべて求めよ。

定義 1.22 (複素数の指数関数, オイラーの表記)**.** e を自然対数の底とする。このとき e を底とする指数関数を

$$e^{a+b\mathbf{i}} = e^a(\cos(b)+\mathbf{i}\sin(b))$$

と定義する。

上の定義と定理 1.19 から次の指数法則が従う。

系 1.23. z_1, z_2 を複素数とするとき、指数法則

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

が成り立つ。

練習問題 1.24. 複素変数の指数関数を用いて、複素変数の三角関数を

$$\sin(z) = \frac{e^{\mathbf{i}z}-e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}}, \quad \cos(z) = \frac{e^{\mathbf{i}z}+e^{-\mathbf{i}z}}{2}$$

と定義すると、z が実数であるときに通常の三角関数と一致することを示せ。

2. 行列

2.1. **行列の定義.**

2.1.1. 行列に関する定義と記法. 図のように長方形の形に「数」がならんでいるものを行列という。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ここでいう「数」とはとりあえず、実数、あるいは複素数のことであるが、将来的には「数」というものをもう少し一般化する可能性もある。行列の中に現れる「数」を行列の要素という。行列において、その要素が実数であるときには実行列、複素数であるときには複素行列という。行列の横の単位を行、縦の単位を列という。図のような行列の場合、行の数は m 個、列の数は n 個である。このような行列を m 行 n 列行列という。これは単に $(m \times n)$ 行列、あるいは (m, n) 行列とも書かれる。このとき (m, n) を行列のサイズという。

行列の中で数の書いている位置を指定するのに何行目、何列目というのを指定すればその位置が決まる。i 行目 j 列目の位置に書いてある要素を (i, j)-成分という。行列は (i, j) 成分をそれぞれ与えれば定まる。(i, j) 成分が a_{ij} で与えられる行列を $(a_{ij})_{ij}$ と書く。上の図で書かれている行列 A がまさしく $(a_{ij})_{ij}$ である。従って $(a_{ij})_{ij}$ と $(a_{kl})_{kl}$ は同じ行列である。時にこの ij を省略して (a_{ij}) と書くこともある。この行列の略記法においては、文字 i, j の使い方は慣用的な意味に使われるものである。

2.1.2. さまざまな行列. ここでは行列で使われる基本的な言葉を定義しておこう。

(1) （0 行列）すべての成分が 0 である行列を 0 行列という。0 行列は O とあらわす。
(2) （正方行列、対角成分）行の個数と列の個数が等しい行列を正方行列という。その個数が n（≥ 1）であるときは n 次正方行列という。つまり n-次の正方行列とは (n, n) 行列のことである。$A = (a_{ij})_{ij}$ を n-次正方行列として $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ を A の対角成分という。
(3) （対角行列、単位行列）$A = (a_{ij})_{ij}$ を正方行列とする。A の対角成分以外の要素が 0 であるとき、A は対角行列であるという。つまり、$i \neq j$ のとき $a_{ij} = 0$ という性質をもつ行列のことで、つぎの形をしている。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

対角行列であって、さらにすべての対角成分が 1 となるとき、A は単位行列という。n 次の単位行列は E_n で表される。正方行列の次数が明らかな場合は単に E と書かれることもある。これは次のような、クロネッカーのデルタ記号を用いて表すこともできる。

整数 j, i に対して、クロネッカーのデルタ記号 δ_{ij} を

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める。このとき n-次単位行列 E_n は $(\delta_{ij})_{ij}$ と表される。

(4) （上半三角行列）対角成分の下側の部分の要素が 0 である正方行列を上半三角行列という。すなわち正方行列 $(a_{ij})_{ij}$ が上半三角行列であるための条件は「$i > j$ ならば $a_{ij} = 0$」が成り立つことである。

(5) （n 次元行ベクトル、列ベクトル）$(1, n)$ 行列を n 次元の行ベクトルという。つまり $(a_1, \cdots, a_n)$ という形の行列である。前の章でやったベクトルも行列の特殊な場合であると言える。$(m, 1)$ 行列を m 次元の行ベクトルというそれは

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$$

という形の行列である。行ベクトルも列ベクトルもベクトルである。縦に並んでいるか、横に並んでいるかの違いである。

2.2. **行列の和、スカラー倍、積.** 行列の要素として考える数のことをスカラーという。この節からしばらくスカラーは実数であると仮定する。

2.2.1. 行列の和. A, B を同じサイズの行列とする。例えば $A = (a_{ij})_{ij}$,$B = (b_{ij})_{ij}$ ともに (m, n) 行列とする。このとき A と B の和 $A + B$ を

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{ij}$$

で定義される (m, n) 行列として定義する。すなわち $A + B$ の (i, j) 成分を A の (i, j) 成分と B の (i, j) 成分の和として定義する。

2.2.2. 行列のスカラー倍. $A = (a_{ij})_{ij}$ を (m, n) 行列として r を実数とする。(m, n) 行列 rA を

$$rA = (ra_{ij})_{ij}$$

によって定義する。すなわち rA の (i, j) 成分を A の (i, j) 成分の r 倍として定義する。このとき次の命題は容易にわかる。

命題 2.1. A, B, C を (m, n) 行列、r, s を実数とすると次が成り立つ。

(1) $A + O = A$
(2) $A + B = B + A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$.
(3) $1A = A$, $r(sA) = (rs)A$.
(4) $(r + s)A = rA + sA$, $r(A + B) = rA + rB$.

$A + (-1)B$ を $A - B$ と書く。

2.2.3. 行列の積とその性質. 行列は積が大変重要な役割を果たす。二つの行列の積はそれらのサイズによって定義できる場合とできない場合がある。

定義 2.2 (行列の積の定義)**.** A を (m,n) 行列、B を (n,l) 行列とする。このとき積 AB が (m,l) 行列として、次のように定義される。$A=(a_{ij})_{ij}$, $B=(b_{jk})_{jk}$ とおくと $1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n,\ 1\leq k\leq l$ という範囲を動くことになる。AB の (i,k) 成分 c_{ik} を定義しよう。つまり $AB=(c_{ik})_{ik}$ として、c_{ik} を

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$

と定める。これはつまり A の i 行目、$a_{i1},\dots,a_{in}$ と、B の j 列目 $b_{1k},\dots,b_{nk}$ をこの順番で掛け合わせて加えたものである。行列の算法はとても自然なもので、様々な場面に現れるが、それは、このすこしいびつな形の積の絶妙な定め方に起因している。

注意 2.3. 行列の積 AB は A の列数と B の行数が一致しない場合には定義しない。

命題 2.4. A を n-次正方行列とすると、$E_nA=A=AE_n$ が成り立つ。

証明. $A=(a_{ij})_{ij}$ とする。$E_n=(\delta_{jk})_{jk}$ と書けることを用いて AE_n の (i,k) 成分を b_{ik} とおくとそれは次のように計算できる。

$$b_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\delta_{jk}=a_{ik}$$

ここで二つ目から三つ目の変形は δ_{jk} が $j=k$ のときが 1 でそうでなければ 0 となることを用いた。従って $AE_n=A$ が示された。$E_nA=A$ も同様である。 □

命題 2.5. A_1,A_2 を (m,n) 行列、B_1,B_2 を (n,l) 行列、r を実数とする。このとき

(1) $(rA_1)B_1=r(A_1B_1)=A_1(rB_1)$
(2) $(A_1+A_2)B_1=A_1B_1+A_2B_1$
(3) $A_1(B_1+B_2)=A_1B_1+A_1B_2$

証明. どれも定義にもどって証明することができるが、ここでは（2）を証明してみよう。添え字と和の使い方にもなれておこう。$A_1=(a_{ij})_{ij},A_2=(a'_{ij})_{ij},B_1=(b_{jk})_{jk}$ とおくと $(A_1+A_2)B_1$ の (i,k) 成分は

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+a'_{ij})b_{jk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}b_{jk}$$

となりこれは $A_1B_1+A_2B_1$ の (j,k) 成分と一致する。従って $(A_1+A_2)B_1=A_1B_1+A_2B_1$ となる。 □

命題 2.6 (積に関する結合法則)**.** A を (m,n) 行列、B を (n,p) 行列、C を (p,q) 行列とする。このとき $(AB)C=A(BC)$ となる。

証明. 証明の前に (AB) は (m,p) 行列より、$(AB)C$ は定義されて (m,q) 行列となり、(BC) は (n,q) 行列より、$A(BC)$ は定義されて (m,q) 行列となるので $(AB)C$, $A(BC)$ はともに (m,q) 行列で等しくなることを注意しておこう。$A=(a_{ij})_{ij}, B=(b_{jk})_{jk}, C=(c_{kl})_{kl}$ と書く。ここで i,j,k,l はそれぞれ $1\le i\le m, 1\le j\le n, 1\le k\le p, 1\le l\le q$ の範囲を動く添字である。AB の (i,k) 成分は $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$ であるから、$(AB)C$ の (i,l) 成分は

$$\sum_{k=1}^{p}\big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\big)c_{kl}=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}c_{kl} \tag{2.1}$$

ここで通常の実数に関する分配法則を用いた。同様にして BC の (j,l) 成分は $\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}$ となるので $A(BC)$ の (i,l) 成分は

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\big(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\big)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{jk}c_{kl} \tag{2.2}$$

ここで式 (2.1) も (2.2) 和をとる添字 (j,k) は $1\le j\le n, 1\le k\le p$ の範囲ですべての組み合わせを1回ずつとって加えるので等しくなる。 □

この命題より、行列の積については括弧をはずして ABC という書き方をしても曖昧さなしに定まることが結論される。この性質を繰り返し用いれば、任意の個数の積 $A_1A_2\cdots A_n$ について考えるとき、これらの積が定義されされすれば、どの隣り合う二つから順番に計算しても計算結果は等しくなるので、括弧を使って書かなくてもよいことがいえる。

2.2.4. 転置行列、対称行列、交代行列. (m,n) 行列 $A=(a_{ij})_{ij}$ に対して、$(a_{ji})_{ij}$ で定義される (n,m) 行列を A の転置行列（トランスポーズ）といい、${}^tA$ と書く。これは

$${}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

という行列のことである。つまり i 行 j 列目に A の j 行 i 列目にあった成分を書いた行列のことであり、これはもともとの行列を対角線に関して折り返したものであると考えればよい。

命題 2.7. A を (m,n) 行列、B を (n,l) 行列とする。このとき ${}^t(AB)={}^tB\,{}^tA$

定義 2.8. A が n-次正方行列とする。$A={}^tA$ が成り立つ行列を対称行列という。また $A=-{}^tA$ が成り立つ行列を交代行列という。

練習問題 2.9. M を n 次正方行列とする。

(1)
$$S=\frac{M+{}^tM}{2},\quad A=\frac{M-{}^tM}{2}$$
とおくと S,A はそれぞれ対称行列、交代行列となる事を示せ。

(2) $M=S+A$ で S,A をそれぞれ対称行列、交代行列という形表すと、S,A はそれぞれ（1）の式で与えられた行列と一致することを示せ。