2.3. **逆行列、正則行列.**

定義 2.10. A を n 次正方行列とする。n 次正方行列 B が存在して $AB = E_n = BA$ が成り立つとき、この性質をもつ B を A の逆行列という。さらに逆行列をもつ正方行列を正則行列という、

命題 2.11. A を正則行列とすると逆行列はただひとつである。

証明. B,B' をともに A の逆行列であるとする。のとき単位行列の性質を用いて
$$B = BE_n = B(AB') = (BA)B' = E_nB' = B'$$
となり $B = B'$ が従う。 □

定義 2.12. A を正則行列とする。その逆行列を A^{-1}（A インバースと読む）と書く。

命題 2.13. A, B を n 次正方行列とする。A, B が正則行列であるとき AB も正則行列であり、その逆行列 $(AB)^{-1}$ は $B^{-1}A^{-1}$ となる。いかえれば正則行列は積について閉じている。

証明. 逆行列の一意性から、$(B^{-1}A^{-1})(AB) = E_n = (AB)(B^{-1}A^{-1})$ を示せばよい。
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n$$
で、もうひとつの方の等式も同様にして示される。 □

練習問題 2.14. (1) $(2, 2)$ 行列
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
は $ad - bc \neq 0$ であることと、A が正則行列であることは同値で、そのとき逆行列 A^{-1} は
$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
で与えられることを示せ。

(2) A, B がともに 2 次正方行列であるときに（１）の逆行列の公式を用いて命題 *2.13* が成立することを確かめよ。

2.4. **行列の分割、分割を用いた計算法.**

2.4.1. ブロック分割と和、スカラー倍. m, n を自然数として $m = m_1 + \cdots + m_p$,$n = n_1 + \cdots + n_q$ と分割する。ここで $p, q \geq 1$, $m_1, \ldots, m_p, n_1, \ldots, n_q \geq 1$ である。A を (m, n) 行列とする。このとき縦 m 行を $m_1, \ldots, m_p$ 行に分割して横 n 列を $n_1, \ldots, n_q$ 列に分割する。このとき行列は次のような形にブロック分割される。これを自然数 m, n の分割に対応する行列のブロック分割という。

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \ldots & A_{pq} \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

ここでひとつのブロック A_{ij} は (m_i, n_j) 行列である。このブロック分割を $(A_{ij})_{ij}$ と書く。行列の和やスカラー倍は共通のブロック分割をしておけば、ブロック毎におこなってもかまわないことは容易にわかる。

命題 2.15. m, n を上のように分割する。A, B を (m, n) 行列として、これは m, n の分割に対応してブロック分割したものを、$A = (A_{ij})_{ij}, B = (B_{ij})_{ij}$ とおく。

(1) $A + B$ をブロック分割したものは $(A_{ij} + B_{ij})_{ij}$ となる。
(2) r を実数とする、rA をブロック分割したものは $(rA_{ij})_{ij}$ となる。

2.4.2. ブロック分割と積. ブロック分割は積に対してもよい性質をもっている。自然数 m, n, l の分割 $m = m_1 + \cdots + m_p$,$n = n_1 + \cdots + n_q$,$l = l_1 + \cdots + l_r$ を考える。A, B をそれぞれ (m, n) 行列、(n, l) 行列とする。上の整数の分割に応じた A, B のブロック分割をそれぞれ $A = (A_{ij})_{ij}$, $B = (B_{jk})_{jk}$ とおく。ここで $1 \leq i \leq p$,$1 \leq j \leq q$,$1 \leq k \leq r$ を動く。ここに現れる小さいブロックの行列 A_{ij} は (m_i, n_j) 行列、B_{jk} は (n_j, l_k) 行列である。

この分割のもとで、行列の積 $A_{ij}B_{jk}$ が定義され、(m_i, l_k) 行列である。従って

$$C_{ik} = \sum_{j=1}^{q} A_{ij}B_{jk} \tag{2.4}$$

も定義され (m_i, l_k) 行列となる。

命題 2.16. 上の状況のもとで AB を上の m, l の分割に対応して分割したものを $AB = (C_{ik})$ とおくと、C_{ik} は式 *(2.4)* で与えられる。

証明. 一般的な分割で考えるとすこし煩雑になるので、一般の場合にも通用する仕方で $m = m_1 + m_2, n = n_1 + n_2, l = l_1 + l_2$ と分割されている場合について確かめよう。このときブロック分割は

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}$$

なる形である。定理の前に出てくるとは添字付けが違ってくるが、$A = (a_{ij})_{ij}, B = (b_{jk})_{jk}, C = (c_{kl})_{kl}$ と成分表示する。このとき、添字は $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq l$ の範囲を動く。AB をブロックわけしてその中の成分を計算したものが、式 (2.4) で計算できる成分との一致を確かめればよい。(i, k) 成分で $1 \leq i \leq m_1, 1 \leq k \leq l_1$ に入っている場合を考える。このときブロックでいえば C_{11} にはいっている場合である。

C_{11} の (i, k) 成分を式 (2.4) で計算したものは

$$(A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}) \text{ の } (i, k) \text{ 成分} = \sum_{j=1}^{n_1} a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=n_1+1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

となりこれは AB の (i, k) 成分を計算したものと一致する。 □

分割と転置に関しては次の関係がある。m, n の $m = m_1 + \cdots + m_p$,$n = n_1 + \cdots + n_q$ なる分割に対応して行列の分割が (2.3) の形で与えられていると

する。このとき ${}^tA$ の分割は

$$A = \begin{pmatrix} {}^tA_{11} & {}^tA_{21} & \dots & {}^tA_{p1} \\ {}^tA_{12} & {}^tA_{22} & \dots & {}^tA_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}^tA_{1q} & {}^tA_{2q} & \dots & {}^tA_{pq} \end{pmatrix}$$

という形で与えられる。

2.4.3. 代表的なブロック分割. 次のような分割はよく使われる。

（1）列ベクトル分割 $m = m$,$n = 1 + 1 + \cdots + 1$ なる分割に対するブロック分割は列ベクトル分割といわれる。このときは (m, n) 行列 $A = (a_{ij})_{ij}$ に対して、

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

であって、

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

となる形の分割である。この分割を用いると (l, m) 行列 B に対して

$$BA = \begin{pmatrix} B\mathbf{a}_1 & \dots & B\mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

と計算でき、計算した結果も列ベクトル分割となっている。

（2）行ベクトル分割 $m = 1 + 1 + \cdots + 1$,$n = n$ なる分割に対するブロック分割は行ベクトル分割といわれる。上と同じ A については

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{pmatrix}$$

で、

$$\mathbf{a}'_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{a}'_n = \begin{pmatrix} a_{mn} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

となる。(n, l) 行列 B に対して

$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n B \end{pmatrix}$$

と計算できる。

3. 線形写像

3.1. **線形写像.**

3.1.1. 写像と合成、全射、単射. S, T を集合とする。S の元 s に対してただ一通りに T の元が対応するとき、その対応を写像という。写像 f による s の行き先を $f(s)$ と書く。この様に集合 S から T への写像があるとき $f : S \to T$ と書く。

定義 3.1. S, T を集合、$f : S \to T$ を S から T への写像とする。

(1) 任意の T の元 t に対してある $s \in S$ が存在して $f(s) = t$ となるとき f は全射であるという。
(2) $s_1, s_2 \in S$ に対して $f(s_1) = f(s_2)$ であれば、$s_1 = s_2$ となるとき、f は単射であるという。
(3) $f : S \to T$ が全射でかつ単射となるとき f は全単射であるという。

例 3.2. (1) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ とする。$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2, f(4) = 2$ によって写像 $f : A \to B$ を定めると、これは全射であるが、$g(1) = 2, g(2) = 2, g(3) = 1, g(4) = 1$ と定めると単射ではない。
(2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ とする。$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 2$ によって写像 $f : A \to B$ を定めると、これは単射であるが、$g(1) = 2, g(2) = 2, g(3) = 1$ と定めると単射ではない。

定義 3.3. (1) S, T, U を集合、$f : S \to T$, $g : T \to U$ を写像とする。$s \in S$ に対して $f(s) \in T$ となるので $h(f(s)) \in U$ が得られる。この仕方で $s \in S$ に対してただ一つの U の元 $g(f(s))$ を対応させることにより、U の元を対応させる対応は S から U の写像を定める。この写像を $g \circ f$ と書き、g と f の合成という。
(2) S を集合とするとき、$g(s) = s$ で定まる写像 $g : S \to S$ を S の恒等写像という。

命題 3.4 (写像の合成に関する結合法則)**.** 4つの集合 S, T, U, V と、3つの写像 $f : S \to T$, $g : T \to U$, $h : U \to V$ を考える。このとき合成写像 $g \circ f : S \to U$, $h \circ g : T \to V$ が得られ、さらに合成をすることにより、$h \circ (g \circ f) : S \to V$ と $(h \circ g) \circ f : S \to V$ なる写像が得られる。このとき

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

となる。

証明. $s \in S$ とすると $(g \circ f)(s) = g(f(s))$ であるので $(h \circ (g \circ f))(s) = h((g \circ f)(s)) = h(g(f(s)))$ となる。他方 $((h \circ g) \circ f)(s) = (h \circ g)(f(s)) = h(g(f(s)))$ なのでこの二つの写像は一致する。 □

命題 3.5. (1) f を $S \to S$, $h : T \to T$ を恒等写像、$g : S \to T$ を $f \circ g = g$, $g \circ h = g$ が成り立つ。
(2) $S.T$ を二つの集合として、$f : S \to T$ を全単射であるとする。このとき $g : T \to S$ なる写像で $g \circ f, f \circ g$ がともに恒等写像となるものが存在する。

練習問題 3.6. S, T, U を集合、$f : S \to T,\ g : T \to U$ を写像とする。

(1) f, g が全射であれば、$g \circ f$ は全射であることを示せ。
(2) f, g が単射であれば、$g \circ f$ は単射であることを示せ。
(3) $g \circ f$ が全射であれば、g は全射であることを示せ。
(4) $g \circ f$ が単射であれば、f は単射であることを示せ。

3.1.2. ベクトル空間、線形写像.

定義 3.7. (1) n 次元の列ベクトルの全体の集合を $\mathbf{R}^n$ と書き n 次元の列ベクトル空間とよぶ。

$$\mathbf{R}^n = \{\ {}^t(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R} \quad (i = 1, \ldots, n)\}$$

列ベクトルは行列の特殊なものとみなすことができ、和とスカラー倍が定義されている。

(2) $\mathbf{R}^n$ の元 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ を

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底という。

このとき次のことが容易にわかる。

補題 3.8. $\mathbf{R}^n$ の任意の v は

$$v = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots x_n\mathbf{e}_n$$

の形に書け、この表し方は一意的である。

証明. 実際、v を成分表示して、${}^t(x_1, \ldots, x_n)$ と書けていれば、$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ の係数として上のように $x_1, \ldots, x_n$ をとればよい。また e_i の係数は v の i 行目の成分と一致しているので一意的である。 □

定義 3.9. m, n を自然数として $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への写像とする。f が線形写像であるとは次の性質を満たすことである。

(1) $\mathbf{R}^n$ の元 v_1, v_2 に対して

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$$

が成り立つ。

(2) $\mathbf{R}^n$ の元 v と実数 r に対して

$$f(rv) = rf(v)$$

が成り立つ

練習問題 3.10. (1) 次の写像は線形写像であることを定義に戻って確かめよ。

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 \\ x_1 - 2x_2 \end{pmatrix}$$

(2) $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ が線形写像であれば、$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ となることを示せ。
(3) $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ が線形写像で全単射であれば、その逆写像も線形写像であることを示せ。

命題 3.11. f, g を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像、h を $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^l$ への線形写像、r を実数とする。このとき

(1) $\mathbf{R}^n$ の元 v に対して写像 $f+g$ を $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$ によって定義すると、これは線形写像である。
(2) $\mathbf{R}^n$ の元 v に対して写像 rf を $(rf)(v) = r(f(v))$ によって定義すると、これは線形写像である。
(3) h と f の合成 $h \circ f$ は $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^l$ への写像となるが、これは線形写像である。

証明.（１）（２）については定義に戻って各自確かめよ。

（３）について確かめよう。v_1, v_2 を $\mathbf{R}^n$ の元、$r \in \mathbf{R}$ とする。合成写像の定義より

$$
\begin{aligned}
(h \circ f)(v_1 + v_2) =& h(f(v_1 + v_2)) \\
=& h(f(v_1) + f(v_1))) \\
=& h(f(v_1)) + h(f(v_2)) \\
=& (h \circ f)(v_1) + (h \circ f)(v_2)
\end{aligned}
$$

より線形写像の定義の一つ目の条件は満たされている。また

$$
\begin{aligned}
(h \circ f)(rv_1) =& h(f(rv_1)) \\
=& h(rf(v_1)) \\
=& rh(f(v_1)) \\
=& r(h \circ f)(v_1)
\end{aligned}
$$

より二つ目の条件も満たされる。 □

次の例は線形写像の典型的な例である。A を (m, n) 行列とする。$v \in \mathbf{R}^n$ に対して $Av \in \mathbf{R}^m$ となる。次の命題は命題 2.5 の帰結である。

命題 3.12. $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への写像 f を

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m : v \mapsto Av$$

で定義する。このとき f は線形写像である。

3.2. **線形写像と行列.**

3.2.1. 線形写像と行列. 命題 3.12 によって多くの線形写像が構成されることがわかったが、実はすべての線形写像は命題 3.12 によって定義された線形写像の形に書ける。より正確には次の定理が成立する。

定理 3.13. $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を線形写像とすると、(m, n) 行列 A が一意的に存在して $f(v) = Av$ と書ける。ここに現れる A を f に対応する行列、あるいは f の表現行列という。

証明. $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底とする。$\mathbf{a}_1 = f(\mathbf{e}_1), \dots, \mathbf{a}_n = f(\mathbf{e}_n)$ とおく。$v = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ とする。補題 3.8 を用いて $v = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ と表と、f が線形写像であることを用いて、

$$\begin{aligned} f(v) =& f(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) \\ =& f(x_1\mathbf{e}_1) + \cdots + f(x_n\mathbf{e}_n) \\ =& x_1 f(\mathbf{e}_1) + \cdots + x_n f(\mathbf{e}_n) \\ =& x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \\ =& \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} v \end{aligned}$$

となる。従って $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ とおけば定理の条件をみたす。

　また $A' = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 & \dots & \mathbf{a}'_n \end{pmatrix}$ が同じ性質、つまり $f(v) = A'v$ がすべての v について成立する、という性質を持てば、

$$\begin{aligned} f(e_i) =& A'\mathbf{e}_i \\ =& \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 & \dots & \mathbf{a}'_n \end{pmatrix} \mathbf{e}_i \\ =& \mathbf{a}'_i \end{aligned}$$

なので $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i$ が言える。従って $A = A'$ となる。 □

練習問題 3.14. 演習問題 *3.10 (1)* で与えられる線形写像の表現行列を求めよ。

3.2.2. 合成と行列の積. $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^l$ を線形写像とする。このとき $g \circ f$ を g と f の合成とする。このとき命題 3.11 により $g \circ f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^l$ も線形写像となる。

命題 3.15. f に対応する (m, n) 行列を F, g に対応する (l, m) 行列を G とすると $g \circ f$ に対応する (l, n) 行列は GF で与えられる。

証明. F, G が f, g と対応する行列であるので $v \in \mathbf{R}^n$, $w \in \mathbf{R}^m$ に対して $f(v) = Fv$, $g(w) = Gw$ となる。従って

$$(g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(Fv) = G(F(v)) = (GF)(v)$$

となる。ここで行列の積に関する結合法則を用いた。従って $g \circ f$ に対応する行列は GF となる。 □