3.3. 線形写像と合成の例.

3.3.1. 回転を表す行列. $\mathbf{R}^2$ を座標平面上の点の集合と同一視する。ここで列ベクトルの集合 $\mathbf{R}^2$ の元 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は点平面上の (x, y) に対応するとする。θ を実数として、点 (x, y) に対して、原点を中止として θ だけ回転した点 (x', y') を対応させる写像を

$$f_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

と書く。

演習問題 3.16. 幾何学的な定義を用いて、$v, w \in \mathbf{R}^2$, $r \in \mathbf{R}$ に対して

(1) $f_\theta(v + w) = f_\theta(v) + f_\theta(w)$
(2) $f_\theta(rv) = r f_\theta(v)$

となることを示せ。

上の演習問題から f_θ は線形写像であることが結論される。さて線形代数 f_θ に対応する行列を求めてみよう。まず、$f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$ を求めてみると、座標 $(1, 0)$, $(0, 1)$ を原点を中心に θ だけ回転させたものは下の図から $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, $(-\sin(\theta), \cos(\theta))$ となることが分かる。従って対応する行列は

$$R(\theta) = (f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

となることが分かる。$R(\theta)$ を回転を表す行列という。さらに原点を中心とする θ_2 回転と θ_1 回転の合成が $\theta_1 + \theta_2$ 回転となることから、$f_{\theta_1 + \theta_2} = f_{\theta_1} \circ f_{\theta_2}$ となり、対応する行列のに対して等式

$$R(\theta_1 + \theta_2) = R(\theta_1) R(\theta_2)$$

が成り立つことがわかる。従って

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) & -\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) & \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る従って、次のおなじみの命題を得る。

命題 3.17.

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \end{aligned}$$

3.3.2. 折り返しを表す行列. 原点を通る、x 軸との正の方向とのなす各が θ の直線を L_θ とする。回転の場合と同様にして、L_θ に関する折り返しも写像 $g_\theta : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を定め、それは線形写像であることがわかる。このとき

$$g_\theta(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix}, \quad g_\theta(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(2\theta - \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(2\theta) \\ -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

となる従って、g_θ に対応する行列 S_θ は

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

となる。

4. 一次方程式の解法

4.1. **核、連立一次方程式.** 連立一次方程式を行列を用いて定式化することを考える。$x_1, \dots, x_n$ を未知数とする次の形の連立一次方程式を考える。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

この形の、つまり定数項のない、連立一次方程式を斉次連立一次方程式という。これを行列を用いて表す。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

とおくと方程式 (4.1)

$$Av = \mathbf{0} \tag{4.2}$$

と表せる。また、A に対応する線形写像を $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ とすると、$f(v) = Av$ であるので方程式 (4.1) の解の集合は

$$\{v \in \mathbf{R}^n \mid Av = \mathbf{0}\} = \{v \in \mathbf{R}^n \mid f(v) = \mathbf{0}\} \tag{4.3}$$

このとき行列 A を方程式 (4.1) の係数行列といい、集合 (4.3) をその解空間という。線形写像 f に対しては、この集合を f の核といい、$\ker(f)$ と書く。同じ集合が時に解空と言われ、時に核と言われるが、要は、連立方程式の解の集合とみなすか、線形写像における 0 の逆像とみなすかという見方の違いに他ならない。

補題 4.1. f を上のとおりとする。次は同値である。

(1) f は単射である。
(2) $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$

4.2. **掃きだし法.**

4.2.1. 同値変形と行基本変形. それでは方程式 (4.1) を具体的に解くにはどうすればよいのだろうか？ここでは方程式 (4.1) を同値変形してより簡単な方程式に変形にすることを考える。同値変形で基本的なものとして次の 3 種類の変形が考えられる。

（R1）c を 0 でない実数、$1 \leq i \leq n$ を自然数とする。方程式 (4.1) の i 行目を c 倍た方程式も、もとの方程式と同値である。このとき方程式は

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ ca_{i1}x_1 + ca_{i2}x_2 + \cdots + ca_{in}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{4.4}$$

となる。このとき方程式 (4.4) の係数行列は方程式 (4.1) の係数行列の i 行目を c 倍したもの、つまり

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \dots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

で与えられる。このように方程式の同値変形を行列の変形として表そう。

（R2）c を実数とし、$1 \leq i, j \leq n$ を異なる自然数とする。方程式 (4.1) の i 行目の c 倍を j 行目に加た方程式も、もともとの方程式と同値である。このとき係数行列は

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} + ca_{i1} & a_{j2} + ca_{i2} & \dots & a_{jn} + ca_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

と変形される。

（R3）$1 \leq i, j \leq n$ を異なる自然数とする。方程式 (4.1) の i 行目と j 行目を入れ替えた方程式も、もともとの方程式と同値である。このとき係数行列は

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \vdots \\ i\text{ 行目} \\ \vdots \\ j\text{ 行目} \\ \vdots \\ \end{matrix}$$

と変形される。

定義 4.2. 行列に対する *(R1)〜(R2)* の変形を行基本変形という。

4.2.2. 掃きだし法. この節では上の 3 つのタイプの基本変形を繰り返し使って方程式を単純化し、解くことを考える。(R1) から (R3) を用いて、係数行列がもし

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

という形に変形できたとすれば、方程式の形に戻すと、

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ x_2 + a_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = 0 \\ 0 = 0 \\ \dots \\ 0 = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

となる。この形の方程式は $x_{r+1}, \dots, x_n$ を決めるごとに $x_1, \dots, x_r$ が一意的に定まり、このようにして得られるものが解の全てである。つまり $t_{r+1}, \dots, t_n$ を

任意に動くパラメータとして、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = t_{r+1}\begin{pmatrix} -a_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + t_{r+2}\begin{pmatrix} -a_{1,r+2} \\ \vdots \\ -a_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + t_n\begin{pmatrix} -a_{1,n} \\ \vdots \\ -a_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

が一般解となる。

一般に係数行列に基本変形を繰り返して、必ず (4.5) の形になるのだろうか?

この例の様に一般の方程式は (4.5) の形になるとは限らない。しかし、変数の入れ替えを許せば、必ず (4.5) の形になることが次の定理から保証されている。

定理 4.3. A を (m, n) 行列とする。行基本変形 *(R1)*〜*(R3)* および次の変形

(C3) 二つの列を入れ替える

を有限回繰り返すことにより、*(4.5)* の形の行列に変形される。

注意 4.4. 行列 A に対して列を入れ替える操作は変数の入れ替えを意味するので、厳密な意味では同値変形といえないが、方程式を解くという目的のためには、充分である。ただし、(しつこいようだが) 変数が入れ替わっている、ということには注意して解を答えなければならない。

証明. (4.5) の形を正規型とよぶことにしよう。帰納法的なアルゴリズムをあたえることにより構成的に証明しよう。行の数 m に関する帰納法で行う。

$m = 1$ のとき。$A = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$ が 0 行列であれば、初めから正規型なので、A が 0 行列でないとする。このとき必要であれば (C3) の列を入れ替えを用いて、$a_{11} \neq 0$ となるようにする。さらに行全体を a_{11} で割れば、$A' = (1, a'_{12}, \ldots, a'_{1n})$ の形に変形され、これは正規型である。

行の数が m の時に定理のアルゴリズムの存在を仮定して $m + 1$ 行の行列 A についての正規型に変形するアルゴリズムを構成しよう。A の行を m 行と 1 行にブロック分割して

$$A = \begin{pmatrix} B \\ b \end{pmatrix} \begin{matrix} \} & m\text{ 行} \\ \} & 1\text{ 行} \end{matrix}$$

とあらわす。帰納法の仮定から A に対して (R1)(R2)(R3)(C3) を繰り返し用いて、B の部分を正規型にもっていく。列の入れ替えをするときは一番下の b の部分も変化を受ける。従って、その結果

$$A' = \begin{pmatrix} E_r & C \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \} & r\text{ 行} \\ \} & m - r\text{ 行} \\ \} & 1\text{ 行} \end{matrix}$$

という形に変形されている。$\mathbf{b_1} = (b_1, \ldots, b_r)$ とおいて、つぎに (R2) の操作を用いて 1 行目を $-b_1$ 倍して $m + 1$ 行目に加え、2 行目を $-b_2$ 倍して $m + 1$ 行

目に加え、$\dots r$ 行目を $-b_r$ 倍して $m+1$ 行目に加えると

$$A'' = \begin{pmatrix} E_r & C \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \underbrace{\mathbf{0}}_{r\text{ 列}} & \underbrace{\mathbf{b}_2'}_{n-r\text{ 列}} \end{pmatrix}$$

という形に変形される。

(1) $\mathbf{b}_2' = \mathbf{0}$ の場合。これですでに正規型になっている。

(2) $\mathbf{b}_2' \neq \mathbf{0}$ の場合。(C3) を用いて必要なら r 列から n 列の間の列を入れ替えて $\mathbf{b}_2' = (b_{r+1}, \dots, b_n)$ とおいたとき、$b_{r+1} \neq 0$ であるとしてよい。さらに $(m+1)$ 行目を b_{r+1} で割り、$\mathbf{b}_2' = (1, b_{r+2}, \dots, b_n)$ であるとしてよい。ここで $(r+1)$ 行目と $(m+1)$ 行目を入れ替えて

$$A''' = \begin{pmatrix} E_r & C \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

の形に変形する。C の 1 列目を $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \end{pmatrix}$ とおいて、$(r+1)$ 行目の $-c_1$ 倍を 1 行目に加え、$(r+1)$ 行目の $-c_2$ 倍を 2 行目に加え、$\dots (r+1)$ 行目の $-c_r$ 倍を r 行目に加えることにより C の 1 目をすべて 0 にする。この結果、

$$A'''' = \begin{pmatrix} E_{r+1} & C' \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

の形に変形され、A は正規型へ変形された。

□

注意 4.5. この解の表現法は一意的ではない。

4.2.3. 階数. まえの節で得られた解のパラメータの数は正規型に変形したときの表示 (4.5) に現れる r を用いて、$(n-r)$ となることがわかる。

定義 4.6. ここに現れた r を行列 A の階数（ランク）という。

直感的には (4.1) の形の方程式を考えたときに $0=0$ のようなものは考えに入れずに、本質的に効いてくる方程式の数と理解できる。しかし、厳密にいえば、ここまでの議論では階数は基本変形の仕方による可能性もある。ここで連立一次方程式の解法が得られたわけだが、次のことが問題となる。

問題 4.7. (1) 上の解法で出てくるパラメータの個数は行基本変形の仕方に依らないのだろうか？基本変形で得られた、階数は変形の仕方によらないか？

(2) ひとつの解をとったとき、上に表現で現れるパラメータは一意的だろうか？

実は後で階数は変形の仕方によらないことが示される。これらの問題を統一的に扱うために、もう少し一般的なベクトル空間の理論で考えたほうがよい。その統一的な扱いについては §6 のベクトル空間のところで行う。

4.3. 基本行列.

4.3.1. 基本行列と基本変形. まえの節で定義した行基本変形を行列の積を用いてあらわそう。行基本変形 (R1)〜(R3) は行単位での変形なので行ベクトル分割

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

を用いてあらわそう。

A に対して (R1) の変形をした結果は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ c\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & c & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

したがって

$$P(c,i) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & c & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば (R1) は $P(c,i)$ を左から書ける操作になっている。

(R2) の変形をすると

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j + \mathbf{c}a_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = Q(c,i,j) \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで $Q(c,i,j)$ は

$$Q(c,i,j) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \vdots \\ i\ \text{行目} \\ \vdots \\ j\ \text{行目} \\ \vdots \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

なる行列である。従って (R2) は $Q(c,i,j)$ を左から書ける操作になっている。
最後に $(R3)$ をした結果は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} = R(i,j) \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \vdots \\ i\text{ 行目} \\ \vdots \\ j\text{ 行目} \\ \vdots \\ \end{array} \end{array}$$

と書ける。ここで $R(i,j)$ は

$$R(i,j) = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \vdots \\ i\text{ 行目} \\ \vdots \\ j\text{ 行目} \\ \vdots \\ \end{array} \end{array}$$

なる行列である。(R3) は $R(i,j)$ を左から書ける操作になっている。

定義 4.8. $P(c,i), Q(c,i,j), R(i,j)$ の形の行列を基本行列という。

上の結果をまとめて、つぎの命題が得られる。

命題 4.9. (1) 行基本変形は基本行列を左からの掛け算をすることによって得られる。したがって B が (m,n) 行列 A から行基本変形の繰り返しによって得られているならば、ある m 次の基本行列の列 $P_1,\dots,P_k$ が存在して、

$$B = P_k \cdots P_2 P_1 A$$

となる。

(2) 基本行列は正則行列である。従ってそれらの積も正則行列である。

証明. (1) は基本行列と上で行った計算の帰結である。(2) は

$$\begin{aligned} P(c,i)P(c^{-1},i) &= E_m \\ Q(c,i,j)Q(-c,i,j) &= E_m \\ R(i,j)R(i,j) &= E_m \end{aligned}$$

となることが計算でもわかる。この等式は基本変形の逆が同じタイプの基本変形で与えられることからもわかる。後半は命題 2.13 からわかる。 □

4.3.2. 列基本変形. 行基本変形は行単位の変形であるが、列についても同様に列基本変形というものを考えることができる。すなわち

(C1) c を 0 でない実数、$1 \leq i \leq n$ を自然数とする。A の i 列目を c 倍する。
(C2) c を実数とし、$1 \leq i, j \leq n$ を異なる自然数とする。A の j 列目の c 倍を i 列目に加える。
(C3) $1 \leq i, j \leq n$ を異なる自然数とする。A の i 列目と j 列目を入れ替える。

(C3) についてはすでに定理 4.3 で使われたものである。

A の列ベクトル分割を

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

とおくと、(C1) の操作をほどこした結果は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & c\mathbf{a}_i & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} P(c, i)$$

となる。(C2) の操作をほどこすと、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_i + c\mathbf{a}_j & \dots & \mathbf{a}_j & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_n \end{pmatrix} Q(c, i, j)$$

となり、(C3) の操作では、

$$\begin{pmatrix} \cdots & \underset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j} & \cdots & \underset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i} & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \underset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i} & \cdots & \underset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j} & \cdots \end{pmatrix} R(i, j)$$

となる。従って列基本変形についても命題 4.9 と同様の次の命題が成立する。

命題 4.10. 列基本変形は基本行列を右からの掛け算をすることによって得られる。したがって B が (m, n) 行列 A から列基本変形の繰り返しによって得られているならば、ある m 次の基本行列の列 $P_1, \dots, P_k$ が存在して、

$$B = AP_1P_2 \cdots P_k$$

となる。

注意 4.11. 列基本変形と行基本変形の二つを混同してはいけない。連立方程式の係数を同値変形で使ってよいのは行基本変形のみである。(注意 *4.4* 参照)

4.3.3. 逆行列の求め方. 行基本変形が基本行列を左から掛ける操作で与えられることを、逆行列を計算することに応用しよう。

命題 4.12. A を n 次正方行列とする。A に行基本変形を繰り返して単位行列 E_n に変形できたとすると、A は正則行列である。

証明. A は行基本変形を繰り返して単位行列に変形されるので、ある基本行列の列 $P_1, \dots, P_k$ が存在して

$$E_n = P_k \cdots P_2P_1A$$

となるので $B = P_k \cdots P_2P_1$ とおけば、$BA = E_n$ となり、また命題 4.9 より B は正則行列である。従って B^{-1} を B の逆行列とすると、

$$E_n = B^{-1}E_nB = B^{-1}BAB = AB$$

も満たされる。したがって B は A の逆行列で A は正則である。 □

上の証明から A を単位行列に変形していく行基本変形の繰り返しは $B = P_k \cdots P_2 P_1$ を左から掛ける操作に一致する。一般に (n, l) 行列 M に対して上で使ったものと同じ行基本変形をほどこすと BM が得られる。とくに $M = E_n$ に対してこの行基本変形を行えば $BE_n = B$ が得られ、A の逆行列が計算される。

この計算法を実際に行うのにより効率的なやり方として A と単位行列 E_n を横に並べた行列

$$(A, E_n)$$

を考え、これに行基本変形を繰り返し行うやり方がある。基本行列 $P_1, \dots, P_k$ に対応する行基本変形を続けて行ない、その結果 1 列目から n 列目の行列（つまり上の行列の全般部分）が単位行列に変形されたとする。このとき、行列は

$$P_k \cdots P_2 P_1 (A, E_n) = (P_k \cdots P_2 P_1 A, P_k \cdots P_2 P_1 E_n) = (E_n, B)$$

という形に変形されたことになる。このときに現れる行列 B（つまり後半部分の行列）が A の逆行列となる。

これで A が基本変形で単位行列に変形される時は逆行列が求められることがわかったが、この方法は任意の正則行列に対して適応できるのだろうか？次のことが問題となる。

問題 4.13. 任意の正則行列 A は基本変形で単位行列に変形されるか？すなわち正則行列は常に基本行列の積で書けるか？

これは実は正しいことが証明されるが、いくつかの事柄を準備したあとの方が証明の見通しがよくなるので、証明は後ですることにする。