4.4. **連立方程式の解法の実際.** 定理 4.3 を使って、実際に方程式の例題を解いて見てみよう。

演習問題 4.14. 次の方程式の一般解をベクトルの一次結合の形で求めよ。

$$\begin{cases} -2x & +4y & +z & -5w & =0 \\ -3x & +11y & +3z & -11w & =0 \\ -3x & +8y & +2z & -9w & =0 \end{cases}$$

解　上の方程式の係数行列を書き出して $(R1), (R2), (R3)$ および $(C3)$ の変形を繰り返す。ただし $(C3)$ を用いた時には変数の順序が交換されていることに注意する。係数行列は

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 & -5 \\ -3 & 11 & 3 & -11 \\ -3 & 8 & 2 & -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

となる。必ずしも必要ではないが、要となる $(1,1)$ 成分は 1 であると計算しやすいことを見越して、1 列目と 3 列目を入れ替える。このとき、変数の順序は変わっていることに注意して、

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} z & y & x & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -5 \\ 3 & 11 & -3 & -11 \\ 2 & 8 & -3 & -9 \end{pmatrix} \end{array}$$

なる係数行列になる。行基本変形を繰り返して

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -5 \\ 3 & 11 & -3 & -11 \\ 2 & 8 & -3 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

変数が変わったことに留意して方程式の形に戻すと、

$$\begin{cases} z & & & +w & =0 \\ & y & & -w & =0 \\ & & x & +w & =0 \end{cases}$$

となる。w は自由に動かせることができるので、$w=s$ とおいて、解をベクトルを用いて表すと、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。またこのとき係数行列 A の階数 $\mathrm{rank}(A)$ は 3 となる。

演習問題 4.15. 次の行列 A に対応する線形写像 f の核を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

解 線形写像 $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ の核を求めるのに、$\mathbf{R}^4$ の元を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ として A の基本変形を行う。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

ここで $(2,2)$ 成分は 0 にならないので、列の入れ替えが必要である。このときは変数の入れ替えにも注意して

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & w \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{matrix} x & z & y & w \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

従って核の元の座標に関する方程式は $x = -2y + 4w, z = -2w$ となるので f の核の一般の元は $y = s, w = t$ とおいて、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

演習問題 4.16. 次の行列 A の逆行列を求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 5 \\ -2 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

解 命題 4.12 の直後の方法によって逆行列を求める。行列 (A, E_3) を基本変形で正規型に変形する。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -7 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

従って A の逆行列は

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

5. 行列式

ここでは n 次の正方行列に対して行列式を定義する。

5.1. **2 次の正方行列の行列式と平行四辺形の面積.** 一般の次数の正方行列の行列式を定義する前に 2 次の場合に行列式を定義しよう。平面上の平行でない二つの $\mathbf{0}$ でないベクトル v_1, v_2 を考える。v_2 が v_1 に対して反時計廻りの方向にあると仮定しよう。原点を始点としてそれらが作る平行四辺形の面積を $S(v_1, v_2)$ とおく。このと正の実数 r に対して、rv_1, v_2 や v_1, rv_2 もこの順番で反時計廻りにならんでいて、

$$S(rv_1, v_2) = rS(v_1, v_2) = S(v_1, rv_2) \tag{5.1}$$

が成り立つ。また平行四辺形の等積変形を考えれば、任意の実数 c に対して

$$S(v_1, v_2 + cv_1) = S(v_1, v_2) = S(v_1 + cv_2, v_2) \tag{5.2}$$

が成り立つ。次に v_2, v_2' が v_1 に対して反時計廻りの方向にあるとすると、v_2+v_2' も反時計廻り方向にあり、

$$S(v_1, v_2 + v_2') = S(v_1, v_2) + S(v_1, v_2') \tag{5.3}$$

が成り立つ。v_2 が時計廻りの方向にあるときに上の形の分配法則 (5.3) が成り立つように $S(v_1, v_2)$ を定義したいが、そうするためには二つのベクトルが時計廻りの方向に並んでいるときには、それらの作る平行四辺形の面積の -1 倍として $S(v_1, v_2)$ を定義すればよい。その意味で $S(v_1, v_2)$ は符号付の面積といわれる。このように定義すると、

$$S(v_1, v_2) = -S(v_2, v_1) \tag{5.4}$$

が成り立つ。

命題 5.1. *性質 (5.1), (5.3), (5.4) から (5.2) は従う。*

証明. 実際 $S(v_1, v_1) = -S(v_1, v_1)$ より $S(v_1, v_1) = 0$ となり、

$$S(v_1, v_2 + cv_1) = S(v_1, v_2) + S(v_1, cv_1) = S(v_1, v_2) + cS(v_1, v_1) = S(v_1, v_2)$$

となる。 □

この性質を用いて平行四辺形の面積（正しくは符号つき面積）を座標を用いて表す公式を導き出そう。基本単位ベクトルを $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とお

く。まず $S(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)=1, S(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)=-1, S(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)=S(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)=0$ に注意して、$v_1=(a,b)=a\mathbf{e}_1+b\mathbf{e}_2, v_2=(c,d)=c\mathbf{e}_1+d\mathbf{e}_2$ と成分表示して、

$$\begin{aligned}
S(v_1,v_2)=&S(a\mathbf{e}_1+b\mathbf{e}_2,c\mathbf{e}_1+d\mathbf{e}_2)\\
=&S(a\mathbf{e}_1,c\mathbf{e}_1)+S(a\mathbf{e}_1,d\mathbf{e}_2)+S(b\mathbf{e}_2,c\mathbf{e}_1)+S(b\mathbf{e}_2,d\mathbf{e}_2)\\
=&acS(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1)+adS(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)+bcS(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1)+bdS(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2)\\
=&ad-bc
\end{aligned}$$

となる。したがって

命題 5.2. $v_1=(a,b), v_2=(c,d)$ のとき $S(v_1,v_2)=ad-bc$ となる。

定義 5.3.

$$v_1=(a,b),\quad v_2=(c,d)$$

とするとき $S(v_1,v_2)=ad-bc$ を

$$A=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$$

の行列式といい、$\det(A)$ であらわす。

5.2. **置換と符号.**

5.2.1. 置換の定義と置換の合成. 1 から n までの自然数全体の集合 $\{1,\dots,n\}$ を $[1,n]$ と書く。もう少し一般に $n<m$ なる二つの自然数の組 n,m に対し n から m までの自然数全体の集合 $\{n,n+1\dots,m\}$ を $[n,m]$ と書く。

定義 5.4. (1) $[1,n]$ から $[1,n]$ の全単射を $[1,n]$ の置換といい、$[1,n]$ の置換全体の集合を $\mathfrak{S}_n$ と書き、n 次の対称群とよぶ。
(2) σ,τ を $[1,n]$ の置換とするとき、その積 $\sigma\tau$ を τ と σ の合成 $\sigma\circ\tau$ によって定める。このとき $\mathfrak{S}_n$ の元 σ,τ,η に対して結合法則 $(\sigma\tau)\eta=\sigma(\tau\eta)$ が成り立つ。

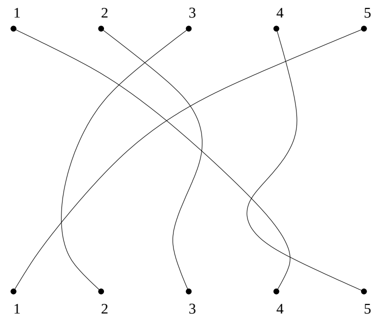
σ を置換とすると、その値を順にならべたもの $(\sigma(1),\dots,\sigma(n))$ は1から n が一回づつ現れる数列、すなわち1から n の順列となる。したがって $\mathfrak{S}_n$ には順列の個数の $n!$ 個の元がある。$\sigma(1)=1,\dots,\sigma(n)=n$ で定まる置換を恒等置換といい、e であらわす。このとき任意の置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して $\sigma e=e\sigma=\sigma$ が成り立つ。また σ の逆写像を逆置換といい、σ^{-1} であらわす。このとき $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=e$ が成り立つ。

注意 5.5. 考えている集合が $[1,n]$ とは限らない有限集合、例えば $n<m$ なる二つの自然数の組 n,m に対しても $[n,m]$ の置換が同様に定義される。これに対する対称群を $\mathfrak{S}[n,m]$ と書くことにする。

5.2.2. 置換の符号. この節では置換の符号を定める。まず置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ に対して (x,y)-平面上で σ を組み合わせ論的にあらわすことを考える。直線 $y=1$ 上に左から等間隔に点 $p_1,\dots,p_n$ をとる。例えば $p_1=(1,1),p_2=(2,1),\dots,p_n=(n,1)$ ととる。$p_1,\dots,p_n$ の真下で $y=0$ 上にある点を $q_1,\dots,q_n$ とおく。上の場合は $(1,0),(2,0),\dots,(n,0)$ となる。写像 σ に対して p_1 と $q_{\sigma(1)}$, p_2 と $q_{\sigma(2)}$,...,p_n と $q_{\sigma(n)}$ を曲線 $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n$ で結ぶ。このときこれら曲線に対して、次の条件が満たされるようにする。

(1) γ_i は p_i から q_i に向かうとき、すべて下に向かっている。つまり同じ高さにとどまったり、上に上がることはない。
(2) ３つ以上の曲線が一点で交わることはない。また二つの曲線が交わる時は接線が異なる。

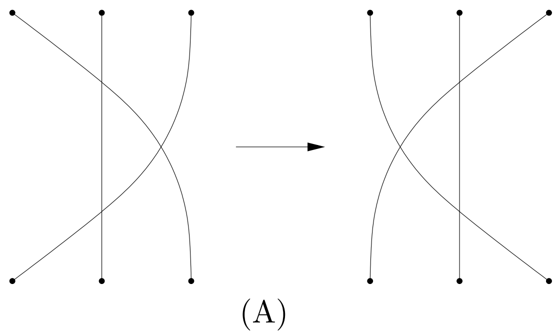
このようにして線を結ぶといくつかの交点ができる。



(図１)

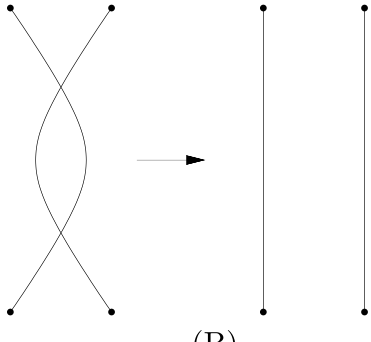
定義 5.6. 交点の個数の偶奇は線の結び方によらない。

証明. n 個の曲線による結び方が二つあるとしてそれらを C_1,C_2 とすると、C_1 を変形して C_2 にすることができる。その変形の途中で交わり方が組み合わせ的に変化を受けるとすれば、



(A)

という形の変形が起こるか



(B)

という形の変形が起こるかのいずれかである。(A) の変形では交点の数は変わらず、(B) の変形では交点の数は 2 個変化する。従ってその偶奇は結び方のとり方によらない。 □

定義 5.7. σ に対する結線の交点が偶数となるとき σ を偶置換といい、奇数となるとき σ を奇置換という。σ の符号 sgn を

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma \text{ が偶置換のとき}) \\ -1 & (\sigma \text{ が奇置換のとき}) \end{cases}$$

と定義する。

命題 5.8. (1) e を恒等置換とすると、$\operatorname{sgn}(e) = 1$

(2) σ を互換とすると、$\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$.

(3) σ, τ を n-次の置換とすると

$$\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau)$$

証明. 対応する結線を書いて、その交点の数に関する考察をすることによって証明しよう。 □

命題 5.9. $n = p + q$ と分割して σ は $[1, p]$ を $[1, p]$ に、$[p+1, n]$ を $[p+1, n]$ に写すものとする。σ の $[1, p]$ の上に引き起こす全単射を ρ, $[p+1, n]$ の上に引き起こす全単射を τ とすると

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\rho) \operatorname{sgn}(\tau)$$

が成り立つ。

定義 5.10 (互換). n を 2 以上の自然数として i, j を異なる $[1, n]$ の元とする。

$$\sigma(k) = \begin{cases} k & (k \neq i, j \text{ のとき}) \\ i & (k = j \text{ のとき}) \\ j & (k = i \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定まる置換を i と j の互換といい (i, j) であらわす。すなわち (i, j) は i と j のみを入れかえて、他を動かさない操作をあらわす $\mathfrak{S}_n$ の元である。

命題 5.11. n を 2 以上の自然数とする。

(1) σ はいくつかの互換の積に書くことができる。

(2) σ を互換とすると $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ である。従って σ を k 個の互換の積で書けたとすると

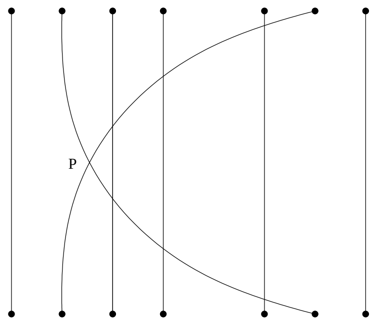
$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$$

である。

証明. (1) σ に対する結線を考える。このとき必要であれば、交点の位置を少しずらして、同じ高さに交点がないようにとれる。ここでいくつかの水平な線で結線を切り隣り合う水平線の間には交点がひとつだけ含まれるようにできる。これを上から読んでいけば、σ が互換の積に書き表せることがわかる。

(2) σ を i, j の互換とする。σ に対して次の図のように結べば、その交点は P 以外の交点がペアになるので、交点の数は奇数であることがわかる。

□



5.3. **行列式の定義.** $[1, n]$ の置換のすべてに番号をつけて $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ とおく。ここで $m = n!$ である。$A = (a_{ij})_{ij}$ を n 次の正方行列とする。$i = 1, \ldots, m$ とするとき、σ_i に対して

$$\mathrm{sgn}(\sigma_i) a_{1,\sigma_i(1)} a_{2,\sigma_i(2)} \cdots a_{n,\sigma_i(n)}$$

を考える。後半は A 要素の中の n 個の積である。3-次正方行列の場合は次の図のようにして計算できる。これらを i が 1 から m まで動くときの和

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{sgn}(\sigma_i) a_{1,\sigma_i(1)} a_{2,\sigma_i(2)} \cdots a_{n,\sigma_i(n)}$$

を A の行列式という。上の和は

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \tag{5.5}$$

とも書かれる。A の行列式を $\det(A)$ や $|\, A \,|$ と表す。

例 5.12 (サラスの公式)**.** ここで 3 次正方行列の行列式の公式を書いてみよう。$\mathfrak{S}_3$ の 6 つの元を順列であらわしたものとその符号の表は次のようになる。σ は $(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$ の形で表すことにすると、なので、

σ	$(1,2,3)$	$(1,3,2)$	$(2,1,3)$	$(2,3,1)$	$(3,1,2)$	$(3,2,1)$
sgn	1	-1	-1	1	1	-1

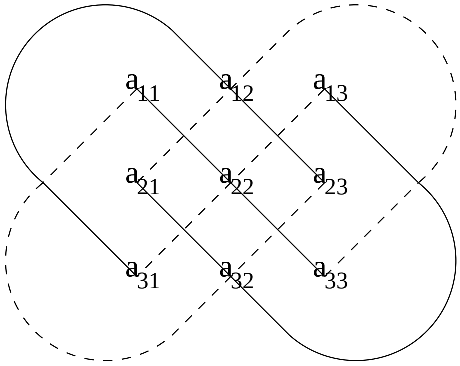
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

としたとき

$$\begin{aligned} \det(A) =& a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

これは下のように行列の要素を線で結んで、実線の部分はかけて符合 +1 をつけ、破線の部分はかけて符号 −1 をつけて加えたものとなる。

　これをサラスの公式という。4 次以上は項の数（例えば 4 次、5 次であれば項の数はそれぞれ $4! = 24$ 個、$5! = 120$ 個となる）が爆発的に大きくなり、このように定義から直接求めるのは大変非効率的である。しかし後の章で紹介される、基本変形を用いる方法で求めれば、比較的効率的に求めることができる。



命題 5.13. (1) 単位行列の行列式は 1 である。

(2) A を n-次行列式とすると、

$$\det(A) = \det({}^t A)$$

証明. (1) $E_n = (\delta_{ij})_{ij}$ の行列式を定義に従って求める。ここで δ_{ij} は 2.1.2 節で定義したクロネッカーのデルタ記号である。σ を n 次の置換としたとき、デルタ記号の積

$$\delta_{1\sigma(1)}\delta_{2\sigma(2)}\cdots\delta_{n\sigma(n)} \tag{5.6}$$

は $\sigma(1) = 1, \sigma(2) = 2, \dots, \sigma(n) = n$ でない場合、すなわち恒等置換 e でない場合は 0 となる。従って定義に現れる和 (5.5) の項の中で積が 0 でないのは $\sigma = e$ のときのみであり、そのときは上の積 (5.6) は 1 となり、$\mathrm{sgn}(e) = 1$ であるので、$\det(E_n) = 1$ となる。

(2) $A = (a_{ij})_{ij}$ とする。σ を置換、σ^{-1} をその逆置換としたとき、積の順番を並べ替えることにより

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\dots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

となる。また $\mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(e) = 1$ であるので $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ となることがわかる。また σ が $\mathfrak{S}_n$ の元をすべて動くとき、σ^{-1} も $\mathfrak{S}_n$ の元すべてを一度ずつ動くことにあるので

$$\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)} = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})a_{\sigma^{-1}(1)1}a_{\sigma^{-1}(2)2}\dots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

の右辺のすべての $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に関する和は

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),1}\cdots a_{\sigma(n),n}$$

であるから、これは行列式の定義の式 (5.5) より ${}^tA = (a_{ji})_{ij}$ の行列式に等しい。従って $\det(A) = \det({}^tA)$ となる。 □