5.4. **ブロック分割と行列式.** $n$ を自然数、$n = p + q$ を $n$ の分割とし、$A$ を $n$ 次正方行列とする。さらに、行、列ともにこの $n$ の分割に応じて行列 $A$ を分割したとき、次の形になったとする。

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}p \\ \}q \end{matrix}$$

$$\qquad\;\; \underbrace{\phantom{A_{11}}}_{p} \quad \underbrace{\phantom{A_{22}}}_{q}$$

すなわち $A = (a_{ij})_{ij}$ としたとき

(5.7)
$$a_{ij} = 0 \quad (i > p, j \leq p)$$

となる行列を考える。

**定理 5.14.** $A$ を上の形の行列とする。このとき

$$\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22})$$

となる。

証明. $\sigma$ を $\mathfrak{S}_n$ の元とする。条件 (5.7) のもとで $i > p$ なる $i$ で $\sigma(i) \leq p$ を満たすものがひとつでもあれば、積

$$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

は 0 となるので、行列の定義の式 (5.5) の和を考えるとき $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ は

$$i > p \text{ なる } i \text{ は } \sigma(i) > p \text{ となる}$$

なるものだけを考えてよい。この条件はいいかえれば $\sigma$ は $[p+1, n]$ を $[p+1, n]$ に写す全単射のみに関する和を考えてよく、それは

$$\sigma \text{ は } [1, p] \text{ を } [1, p] \text{ に、} [p+1, n] \text{ を } [p+1, n] \text{ に写す全単射}$$

なる $\sigma$ の和だけを考えればよいことになる。この形の $[1, n]$ の全単射は $[1, p]$ から $[1, p]$ の全単射 $\rho \in \mathfrak{S}[1, p]$ と $[p+1, n]$ から $[p+1, n]$ への全単射 $\tau \in \mathfrak{S}[p+1, n]$ のペアのすべてを考えることと同じである。符号に関する命題 5.9 を用いれば、$\det(A)$ は

$$\sum_{\rho \in \mathfrak{S}[1,p]} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}[p+1,n]} \operatorname{sgn}(\rho) \operatorname{sgn}(\tau) \bigl(a_{1,\rho(1)} \cdots a_{p,\rho(p)}\bigr) \bigl(a_{p+1,\tau(p+1)} \cdots a_{n,\tau(n)}\bigr)$$

という和になる。$\rho$ と $\tau$ は独立に動くことができるので、上の式は

$$\Bigl( \sum_{\rho \in \mathfrak{S}[1,p]} \operatorname{sgn}(\rho) a_{1,\rho(1)} \cdots a_{p,\rho(p)} \Bigr) \Bigl( \sum_{\tau \in \mathfrak{S}[p+1,n]} \operatorname{sgn}(\tau) a_{p+1,\tau(p+1)} \cdots a_{n,\tau(n)} \Bigr)$$

という形に因数分解できる。従って、これは $\det(A_{11}) \det(A_{22})$ と一致する。 □

**系 5.15.** $A$ のブロック分割が

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}p \\ \}q \end{matrix}$$

$$\qquad\;\; \underbrace{\phantom{A_{11}}}_{p} \quad \underbrace{\phantom{A_{22}}}_{q}$$

という形になったとする。このとき $\det(A) = \det(A_{11}) \det(A_{22})$ となる。

証明. 等式

$$
{}^tA = \begin{array}{c@{}l} \left(\begin{array}{cc} {}^tA_{11} & {}^tA_{21} \\ O & {}^tA_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{l} \}p \\ \}q \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{p} & \underbrace{\qquad}_{q} \end{array} & \end{array}
$$

に注意して、転置行列の行列式の公式を用いると

$$
\det(A) = \det({}^tA) = \det({}^tA_{11})\det({}^tA_{22}) = \det(A_{11})\det(A_{22})
$$

となり、系を得る。 □

**例 5.16.** $n = 1+(n-1)$ なるに分割に対して定理 *5.14* を使ってみよう。$a \in \mathbf{R}$, $\mathbf{b}$ は $(n-1)$ 次元の行ベクトル、$C$ を $(n-1)$ 次の正方行列とするとき、次のような公式が成り立つ。

$$
\det\begin{pmatrix} a & \mathbf{b} \\ O & D \end{pmatrix} = a\det(D)
$$

この公式はある次数の正方行列の行列式の計算を、もうひとつ小さい次数の行列の行列式の計算に帰着させるときに用いられる。上の例の公式を繰り返し用いることにより次の系が得られる。

**命題 5.17.** $A$ を下の形の上半行列とする。

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

このとき、$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ となる。

**演習問題 5.18.** $n = n_1 + \cdots + n_k$ を $n$ の分割とする。これに応じて $n$ 正方行列 $A$ の分割を考えたとき、$A$ が

$$
A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2k} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3k} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{kk} \end{pmatrix}
$$

という形になったとする。このとき

$$
\det(A) = \det(A_{11})\det(A_{22})\cdots\det(A_{kk})
$$

とななることを示せ。ここで $A_{pq}$ は $(n_p, n_q)$ 行列である。

5.5. **多重線形性、交代性.**

5.5.1. 多重線形性と交代性. この節では行列の基本的な性質である、多重線形性と交代性についてのべる。多重線形性については列多重線形性と行多重線形性の二つの多重線形性がある。2 次の正方行列の場合、列に関する多重線形性とは先に述べた、(5.1) (5.3) の性質のことであり、交代性とは (5.4) の性質のことである。

一般次数の正方行列の行列式に関する線形性については、これから述べるが、行列式の転置に関する命題 5.13 を用いることにより、列に関する線形性から行に関する線形性が導かれる。$A$ を $n$ 次正方行列として、そのを列ベクトル分割を

$$A = \big(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n\big)$$

とする。このとき $\det(A) = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ と書く。(本来は $\det((\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n))$ と書くべきところであるが。)

**命題 5.19** (列に関する多重線形性)**.** (1) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ 及び $\mathbf{a}'_i, \mathbf{a}''_i$ を $n$ 次元の列ベクトルとする。このとき

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}'_i + \mathbf{a}''_i, \ldots, \mathbf{a}_n) \\ =&\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}'_i, \ldots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}''_i, \ldots, \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

(2) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ を $n$ 次元の列ベクトルとする。

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, r\mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n) = r\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

**注意 5.20.** 上の性質を $i$ 列目以外は固定して考えているとみて、$i$ 列目に関する線形性という。

証明. (1) $\mathbf{a}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\mathbf{a}'_i, \mathbf{a}''_i$ を

$$\mathbf{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}'_i = \begin{pmatrix} a'_{1i} \\ \vdots \\ a'_{ni} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}''_i = \begin{pmatrix} a''_{1i} \\ \vdots \\ a''_{ni} \end{pmatrix}$$

とおき、$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}'_i + \mathbf{a}''_i$ とする。このとき分配法則を用いて、

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a'_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &\quad + \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a''_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}'_i, \ldots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}''_i, \ldots, \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

となり (1) の関係式を得る。

(2) $\mathbf{a}_j$ $(j=1,\dots,n)$ を上と同様とし、$r$ を実数とすると、

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{a}_1,\dots,r\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n)=&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots(ra_{i\sigma(i)})\cdots a_{n\sigma(n)}\\=&r\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{i\sigma(i)}\cdots a_{n\sigma(n)}\\=&r\det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_i,\dots,\mathbf{a}_n)\end{aligned}$$

となり (2) を得る。 □

この命題を $r=0$ に対して適用すると、次の命題を得る。

**系 5.21.** すべての要素が 0 になる列があれば行列式は 0 である。すなわち

$$\det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{0},\dots,\mathbf{a}_n)=0$$

**命題 5.22** (列に関する交代性)**.** $n$ を 2 以上の自然数とし、$1\le i<j\le n$ とする。このとき

$$\det(\mathbf{a}_1,\dots,\overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j},\dots,\overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i},\dots,\mathbf{a}_n)=-\det(\mathbf{a}_1,\dots,\overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i},\dots,\overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j},\dots,\mathbf{a}_n)$$

すなわち二つの列を入れかえると符号が変わる。

*証明.* $n,i,j$ を命題の自然数とする。$(i,j)$ を $i$ と $j$ の互換とする。$A=(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)$, $A'=(\mathbf{a}_1,\dots,\overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j},\dots,\overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i},\mathbf{a}_n)$ とおく。$A'$ の行列式を考えるとき、定義 (5.5) における置換 $\sigma$ に対する項は $A'$ の各 $p$ 行目から $\sigma(p)$ 列目を選んだものの積なので、$A$ の各 $p$ 行目から $(i,j)\sigma(p)$ 列目を選んだ積と等しい。$\mathfrak{S}_n$ の元 $\sigma$ に対して $\sigma'$ を $(i,j)\sigma$ によって定めると、$\mathrm{sgn}(\sigma)=-\mathrm{sgn}(\sigma')$ となる。さらに $\sigma$ が $\mathfrak{S}_n$ のすべての元を一回ずつ動くときは、$\sigma'$ も $\mathfrak{S}_n$ のすべての元を一回ずつ動くので、

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{a}_1,\dots,\overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j},\dots,\overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i},\dots,\mathbf{a}_n)=&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma'(1)}\cdots a_{n\sigma'(n)}\\=&\sum_{\sigma'\in\mathfrak{S}_n}(-\mathrm{sgn}(\sigma'))a_{1\sigma'(1)}\cdots a_{n\sigma'(n)}\\=&-\det(\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n)\end{aligned}$$

となる。 □

上の交代性と命題 5.11 を用いると次の系が得られる。

**系 5.23** (行列式の列の置換と符号)**.** $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ とする。このとき

$$\det(\mathbf{a}_{\sigma(1)},\mathbf{a}_{\sigma(2)},\dots,\mathbf{a}_{\sigma(n)})=\mathrm{sgn}(\sigma)\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\dots,\mathbf{a}_n)$$

が成り立つ。

行列式の転置に関する命題 5.13 を用いると、次の行に関する多重線形性と交代性が証明できる。$A$ を $n$ 次正方行列、そのを行ベクトル分割を $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ とするとき $\det(A) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$ と書く。

**命題 5.24** (行に関する多重線形性)**.** (1) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ 及び $\mathbf{a}'_i, \mathbf{a}''_i$ を $n$ 次元の行ベクトルとする。このとき

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i + \mathbf{a}''_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}''_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

(2) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ を $n$ 次元の行ベクトルとする。このとき、

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ r\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = r \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}$$

が成り立つ。

証明. 転置と行列式の公式を用いる。

$${}^t\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \left({}^t\mathbf{a}_1, \ldots, {}^t\mathbf{a}_n\right)$$

なので、命題 5.13 を用いて

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}'_i+\mathbf{a}''_i\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix} &= \det\left({}^t\mathbf{a}_1,\dots,{}^t\mathbf{a}'_i+{}^t\mathbf{a}''_i,\dots,{}^t\mathbf{a}_n\right)\\ &= \det\left({}^t\mathbf{a}_1,\dots,{}^t\mathbf{a}'_i,\dots,{}^t\mathbf{a}_n\right)+\det\left({}^t\mathbf{a}_1,\dots,{}^t\mathbf{a}''_i,\dots,{}^t\mathbf{a}_n\right)\\ &= \det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}'_i\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}''_i\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) も同じ方針で列に関する多重線形性に帰着される。 □

**系 5.25.** すべての要素が 0 となる行がある $n$ 次正方行列の行列式は 0 である。

**命題 5.26** (行に関する交代性)**.** $n$ を 2 以上の自然数、$1\le i<j\le n$ とする。さらに $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ を $n$ 次元の行ベクトルとする。このとき

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_i\\ \vdots\\ \mathbf{a}_j\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}=-\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_j\\ \vdots\\ \mathbf{a}_i\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \vdots\\ i\text{ 行目}\\ \vdots\\ j\text{ 行目}\\ \vdots\\ \ \end{array}$$

が成り立つ。

**系 5.27** (行列式の行の置換と符号)**.** $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ を $n$ 次元の行ベクトル、$\sigma\in\mathfrak{S}_n$ とする。このとき

$$\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_{\sigma(1)}\\ \mathbf{a}_{\sigma(2)}\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{\sigma(n)}\end{pmatrix}=\operatorname{sgn}(\sigma)\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\\ \vdots\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$$

が成り立つ。

行列式の列に関する交代性、多重線形性から次の命題が導かれる。

**命題 5.28.** $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_n$ を $n$ 次元の列ベクトルとする。

(1) 同じ列のある行列式は 0 である。すなわち $i\ne j$ として

$$\det(\mathbf{a}_1,\dots,\overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i},\dots,\overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i},\dots,\mathbf{a}_n)=0$$

(2) ひとつの列の何倍かをしたものを他の列に加えても行列式の値は変わらない。すなわち $i \neq j$ として,$c$ を実数とすると、

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j + c\mathbf{a}_i}, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

となる。

証明. (1) $i$ 行目と $j$ 行目が同じとして、それらを交換すると、交代性より、

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \mathbf{a}_n) = -\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

これを移項して 2 でわり、命題を得る。

(2) 列に関する多重線形性と (1) を用いて

$$\begin{aligned}
&\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j + c\mathbf{a}_i}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
=&\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j}, \ldots, \mathbf{a}_n) + \det(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{c\mathbf{a}_i}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
=&\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j}, \ldots, \mathbf{a}_n) + c\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \mathbf{a}_n) \\
=&\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \ldots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j}, \ldots, \mathbf{a}_n)
\end{aligned}$$

となる。 □

行についても同様にして、次の定理が成立する。

**命題 5.29.** $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ を $n$ 次元の行ベクトルとする。

(1) 同じ行のある行列式は 0 である。すなわち $i \neq j$ として

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i\text{ 列目} \\ \vdots \\ j\text{ 列目} \\ \vdots \\ \\ \end{array} = 0$$

(2) ひとつの行の何倍かをしたものを他の行に加えても行列式の値は変わらない。すなわち $i \neq j$ として,$c$ を実数とすると、

$$\det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j + c\mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \vdots \\ i\text{ 列目} \\ \vdots \\ j\text{ 列目} \\ \vdots \\ \\ \end{array}$$

が成り立つ。

命題 5.29 と例 5.16 を用いると、ある次数の行列式を求めることをひとつ小さい次数の行列式を求めることに帰着できる。これは次数が高くなると大変効率的な方法である。

**例 5.30.** 次の $5 \times 5$ 行列を求めてみよう。掃出し法と同じ変形を使うが、行に数をかけるとき、行を入れ替えるときは注意をしよう。

$$
\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -9 & 13 & 17 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{1 行目と 2 行目を交換する}
$$

$$
= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -9 & 13 & 17 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{c} \text{1 行目の $-3$ 倍を 2 行目に} \\ \text{1 行目の $-2$ 倍を 3 行目に} \\ \text{1 行目の $-3$ 倍を 4 行目に} \\ \text{1 行目の $-1$ 倍を 5 行目に} \\ \text{加える} \end{array}
$$

$$
= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & -2 & -6 & 7 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -3 \end{vmatrix} \qquad \text{ブロック分けの公式を用いる}
$$

$$
=1 \times - \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & -7 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ -2 & -6 & 7 & 11 \\ 1 & 3 & -3 & -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{array}{c} \text{1 行目の 2 倍を 3 行目に} \\ \text{1 行目の $-1$ 倍を 4 行目に} \\ \text{加える} \end{array}
$$

$$
=(-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & -7 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{ブロック分けの公式を用いる}
$$

$$
=(-1) \times \begin{vmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -19 \qquad \text{サラスの公式}
$$

行列式を定義通りもとめれば $5!$ 回の計算をしなくてはならないところを上のように計算すればかなり簡略化されているのがわかる。