5.6. **行列の積と行列式.** この節では行列式の乗法性という性質を証明する。

定理 5.31. A, B を n 次正方行列とする。このとき

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

証明. A を列ベクトル分割、B を成分表示して、

$$A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n), B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

と書くとき、$b_{ij} \in \mathbf{R}$ で

$$AB = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$$

とおくと、各列 $\mathbf{c}_j$ は $\mathbf{c}_j = \sum_{i=1} \mathbf{a}_i b_{ij}$ と計算される。そこで列に関する多重線形性を繰り返し用いて、

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n) &= \sum_{i_1} b_{1,i_1} \det(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n) \\ &= \sum_{i_1} \sum_{i_2} b_{1,i_1} b_{2,i_2} \det(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \mathbf{c}_3, \dots, \mathbf{c}_n) \end{aligned}$$

と変形される。ここで和の添字である i_1, i_2 はそれぞれ独立に 1 から n まで動く。この操作を繰り返し

$$\det(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} b_{1,i_1} b_{2,i_2} \cdots b_{n,i_n} \det(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_n}) \tag{5.8}$$

ここで和の記号は $i_1, i_2, \dots, i_n$ が 1 から n まで独立に動くものとする。和に現れる添字で $i_1, \dots, i_n$ のうちで等しいものがあれば、$\det(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_n}) = 0$ であるので、その部分は和に寄与してこない。従って $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ は順列を動くとしてよい。従って式 (5.8) は系 5.23 を用いると、

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} b_{1,\sigma(1)} b_{2,\sigma(2)} \cdots b_{n,\sigma(n)} \det(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \mathbf{a}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}) \\ = &\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{1,\sigma(1)} b_{2,\sigma(2)} \cdots b_{n,\sigma(n)} \det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \\ = &\det(B)\det(A) \end{aligned}$$

となり、定理を得る。 □

5.7. **行列の展開、余因子行列.**

5.7.1. 余因子行列. A を n 次正方行列、$1 \leq i, j \leq n$ なる自然数とする。A から i 行目と j 列目（下の点線で囲った部分）を抜き去ってできた $(n-1)$ 次の正方行列を A_{ij} と書く。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

定義 5.32. (1) A の (i,j) 余因子 $\widetilde{A}_{ij}$ を

$$\widetilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$$

と定義する。

(2) A の余因子行列 $\widetilde{A}$ を

$$\widetilde{A} = (\widetilde{A}_{ji})_{ij}$$

と定義する。($(\widetilde{A}_{ij})_{ij}$ ではなくその転置行列となっていることに注意せよ。)

定義 3.7 で定義したように、列ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の標準基底を $\mathbf{e}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ とおき、その転置行列を $\mathbf{e}'_i$ とおく。

補題 5.33. A の列ベクトル分割、行ベクトル分割を

$$A = (\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{pmatrix}$$

とおく。このとき

$$\tilde{A}_{ij} = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{e}_i}, \dots, \mathbf{a}_n) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{e}'_j \\ \vdots \\ \mathbf{a}'_n \end{pmatrix} i\text{ 行目}$$

となる。

証明. 一つ目の等式を証明する。j 列目を 1 列めにもっていくときに必要な互換の数は $(j-1)$ 個なので、

$$\det(\mathbf{a}_1, \dots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{e}_i}, \dots, \mathbf{a}_n) = (-1)^{j-1}\det(\mathbf{e}_i, \mathbf{a}_1, \dots, , \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n)$$

さらに右辺の i 行目を 1 列目にもっていくときに飛び越える行の数は $(i-1)$ 個なので、右辺は

$$(-1)^{j-1}(-1)^{i-1}\det\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & A_{ij} \end{pmatrix} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij}) = \tilde{A}_{ij}$$

二つ目の等式も同様に示される。 □

次の定理は行列式の展開公式と呼ばれる。

定理 5.34 (展開公式)**.** $A = (a_{ij})_{ij}$ を n 次正方行列、$\widetilde{A}_{ij}$ を (i,j) 余因子とする。このとき

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{A}_{ij} a_{ij} \tag{5.9}$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{A}_{ij} a_{ij} \tag{5.10}$$

が成り立つ。*(5.9)* を j 列目に関する展開公式、*(5.10)* を i 行目に関する展開公式という。

証明. 証明はどちらもほぼどうようなので (5.9) の方を証明する。A の列分割を $(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ として標準基底を用いて $\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i$ と表すと、

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_n) &= \sum_{i=1}^{n} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \overset{j\text{ 列目}}{a_{ij}\mathbf{e}_i}, \dots, \mathbf{a}_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \det(\mathbf{a}_1, \dots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{e}_i}, \dots, \mathbf{a}_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \widetilde{A}_{ij}
\end{aligned}$$

となる。ここで最後の変形は補題 5.33 を用いた。 □

系 5.35. 上の定理と同じ記号のもとで $j \neq k$ とすると、

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{A}_{ij} a_{ik} = 0$$

$i \neq k$ とすると、

$$\sum_{j=1}^{n} \widetilde{A}_{ij} a_{kj} = 0$$

証明. A の j 列目を k 列目で置き換えた行列の行列式 $D = \det(\mathbf{a}_1, \dots, \overset{j\text{ 列目}}{\mathbf{a}_k}, \dots, \mathbf{a}_n)$ を考えれば、k 列目と k 列目は等しいので、$D = 0$ になる。この D を i 列目に関して展開すれば、

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{A}_{ij} a_{ik} = 0$$

をえる。二つ目は行列 A の i 列目を k 列目で置き換えた行列の行列式を i 行目に関して展開することにより同様にして証明される。 □

定理 5.36. A を n 次正方行列、$\tilde{A}$ をその余因子行列とする。このとき

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A) \cdot E_n \tag{5.11}$$

となる。とくに $\det(A) \neq 0$ のとき A は正則行列であり、

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$$

となる。

証明. $A = (a_{ij})_{ij}$ とおくと、$\tilde{A}A$ の (i,k) 成分は

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_{ji} a_{jk} &= \begin{cases} \det(A) & k = i \text{ のとき} \\ 0 & k \neq i \text{ のとき} \end{cases} \\ &= \delta_{ik} \det(A)\end{aligned}$$

と書ける。ここで δ_{ik} はクロネッカーのデルタ記号である。これから $\tilde{A}A = \det(A)E_n$ を得る。$A\tilde{A} = \det(A)$ も同様にして証明される。また $\det(A) \neq 0$ のときは、(5.11) の辺々を $\det(A)$ で割り、$\dfrac{1}{\det(A)}A^{-1}$ が A の逆行列となることがわかる。 □

命題 5.37. A を n-次正方行列とするとき次は同値である。

(1) A は正則行列である。
(2) $\det(A) \neq 0$
(3) $AB = E_n$ となる B が存在する。
(4) $BA = E_n$ となる B が存在する。

証明. (2) から (1) は定理 5.36 で示した。(1) から (3)(あるいは (1) から (4)) は正則行列の定義の一部分である。(3) ならば (1) を示そう。$AB = E_n$ となる B が存在したとすると、この式の両辺の行列式をとり、

$$1 = \det(E_n) = \det(AB) = \det(A)\det(B)$$

が成り立つ。したがって A の行列式 $\det(A)$ は 0 でない。(4) から (1) も同様である。これから (1) から (4) はすべて同値であることが示された。 □

問題 4.13 は、次の命題によって解決され、正則行列の逆行列は §4.3.3 の方法により必ず求められることが保障される。

命題 5.38. 正則行列は基本行列の積にかける。

証明. A を正則行列とする。A は行基本変形 (R1)(R2)(R3) と列の入れ替え (C3) を何回か繰り返して

$$A' = \begin{pmatrix} E_r & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

という形に変形される。命題 4.9(1), 4.10 より、基本行列の積 P と (C3) の形の基本行列の積 Q が存在して $A' = PAQ$ という形にかける。命題 4.9(2) より P, Q は正則行列なので命題 2.13 より A' も正則行列である。ところが命題 5.25 より $r < n$ であれば $\det(A') = 0$ である。これは命題 5.37 の同値性に反する。したがって $r = n$ となり、$PAQ = E_n$ となる。これから $A = P^{-1}Q^{-1}$ となるが、命題 4.9 の証明の中の式より $P^{-1}Q^{-1}$ も基本行列の積になることが言える。 □

5.8. **ファンデルモンドの行列式.** n を 2 以上の自然数、$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を実数とするとき、行列 $D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ を

$$D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

と定め、$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \det D((\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ をファンデルモンドの行列式という。

定理 5.39.

$$\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

注意 5.40 ($\prod$ 記号)**.** 和をあらわす $\sum$ 記号にたいして有限の数列の積の記号 $\prod$ を

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$$

によって定義する。また、定理のように、$\prod$ の下に書いてある条件をみたすような添字にわたって、$\prod$ のあとに書いてある式をかけるというように使われる。たとえば下の式の左辺の添字は $(i, j) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ にわたって (i, j) が動くので、

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 3} (\lambda_j - \lambda_i) = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)$$

となる。

証明. n に関する帰納法で証明する。$n = 2$ のときは直接計算で確かめられる。$f(x) = x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ を $(n-1)$ 次の実係数多項式とする。それらの係数を用いて、

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & 1 \end{pmatrix}$$

なる行列を考える。$D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ と列分割すると、

$$M\mathbf{a}_i = M \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-2} \\ \lambda_i^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-2} \\ f(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

ここで $(n-1)$ 次多項式 $f(x)$ として

$$f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_{n-1})$$

(を展開したもの) とおけば $i = 1, \ldots, n-1$ に対して $f(\lambda_i) = 0$ なので、

$$M\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} MD(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) &= M(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = (M\mathbf{a}_1, \ldots, M\mathbf{a}_n) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \ldots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \lambda_n^{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & f(\lambda_n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで $\det(M) = 1$ (命題 5.17) と定理 5.14 を用いて

$$\begin{aligned} \det(D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) &= \det(M)\det(D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) \\ &= \det(MD(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)) \\ &= \det(D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}))f(\lambda_n) \end{aligned}$$

となるが、帰納法の仮定から

$$\begin{aligned} \det(D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}))f(\lambda_n) &= \prod_{1 \le i < j \le n-1} (\lambda_j - \lambda_i) \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i) \\ &= \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i) \end{aligned}$$

□

注意 5.41. この定理は次のような美しい証明もある。多変数の多項式に対する因数定理をもちいると、$\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ は $1 \le i < j \le n$ に対して $(\lambda_j - \lambda_i)$ で割れることが結論される。したがって次数を比較することにより $\Delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ が $\prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)$ の定数倍となることがわかる。$\prod_{i=1}^n \lambda_i^{i-1}$ の係数を比較して定理をえる。

5.9. **クラメルの公式.** A を n 次正則行列として、$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ を n 次元の列ベクトルとする。このときベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$ に関する方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ を考える。

命題 5.42. 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解はただ一つで $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ となる。

証明. A が正則行列であることから辺々に A^{-1} をかけることにより必要条件であることはすぐわかる。十分条件であることも $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ を代入してみればわかる。 □

定理 5.43. 上と同じ状況で $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$ と列ベクトル分割をする。このとき

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{a}_1, \dots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{b}}, \dots, \mathbf{a}_n)}{\det(A)}$$

となる。

証明. $\mathbf{x}$ に関する解が存在してただ一つであることはわかっている。従って

$$\mathbf{b} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{a}_i$$

従って

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{a}_1 \dots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{b}}, \dots, \mathbf{a}_n) &= \det(\mathbf{a}_1 \dots, \overset{i\text{ 列目}}{\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{a}_j}, \dots, \mathbf{a}_n) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \det(\mathbf{a}_1 \dots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \mathbf{a}_n) \end{aligned} \tag{5.12}$$

ここで $j \neq i$ であれば、i 列目と j 列目には同じ列が現れるので、$\det(\mathbf{a}_1 \dots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_j}, \dots, \mathbf{a}_n) = 0$ となることを用いれば、(5.12) は

$$x_i \det(\mathbf{a}_1 \dots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{a}_i}, \dots, \mathbf{a}_n) = x_i \det(A)$$

を得る。$\det(A) \neq 0$ で割ると、

$$x_i = \frac{\det(\mathbf{a}_1 \dots, \overset{i\text{ 列目}}{\mathbf{b}}, \dots, \mathbf{a}_n)}{\det(A)}$$

となる。 □

5.10. **3 次の行列式の幾何学的意味.**

5.10.1. 空間のベクトル積. 空間のベクトル積を定義しよう。これは外積とも呼ばれる。$\mathbf{0}$ でなく、平行でない二つの空間ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ に対して、その外積 $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ を次の性質が成り立つ空間ベクトルとして定める。$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ の定める平面を H とおく。

(1) $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ の大きさは H 内で $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ を 2 辺とする平行四辺形の面積である。
(2) 方向は H と垂直で $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ がこの順番で右手系となっている

この条件を満たすような $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ がただ一つ定まる。$\mathbf{v}_1$ または $\mathbf{v}_2$ が $\mathbf{0}$ となる場合、あるいは $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ が平行な場合は $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ と定義する。このとき次の性質が成り立つ。

命題 5.44. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を空間ベクトル,r を実数とする。

(1) $(\mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$
(2) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$,
$(r\mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \times (r\mathbf{v}_2) = r(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$
(3) $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1$

証明. (1) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + r\mathbf{v}_2$ はすべて同一平面状にのっている。ここで $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2 + r\mathbf{v}_2$ を 2 辺とする平行四辺形は $\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ を 2 辺とする平行四辺形を等積変形したものになっている。しかも $\mathbf{w}$ が H に垂直で $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}$ が右手系であれば、$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + r\mathbf{v}_2, \mathbf{w}$ も右手系なので、上の等式を得る。、

(2) 説明のために座標系を $\mathbf{v}_3$ が z 軸と平行で正の方向であるとする。このとき xy 平面は $\mathbf{v}_3$ と垂直な平面となっている。$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ の xy 平面への正射影を $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ とおくと、$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + r_1\mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 + r_2\mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + r_3\mathbf{v}_3$ なる実数 r_1, r_2, r_3 があり、$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_3$ となる。(1) の性質から

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_3, \quad (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3,$$

$\|\mathbf{v}_3\| = l$ とおき、xy 平面内で $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ をそれぞれ正の方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ回転させたものを $\mathbf{w}'_1, \mathbf{w}'_2, \mathbf{w}'_3$ とおくと、$\mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2 = \mathbf{w}'_3$ であり、

$$\mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_3 = l\mathbf{w}'_1, \quad \mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_3 = l\mathbf{w}'_2, \quad \mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3 = l\mathbf{w}'_3,$$

となるので、

$$\mathbf{w}_1 \times \mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_2 \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3 \times \mathbf{v}_3$$

となる。これから命題の一つ目の式を得る。二つ目の式は、容易にたしかめられる。

(3) 外積の定義と右手系の定義からわかる。 □

命題 5.45.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

となる。

証明. $\mathbf{R}^3$ の標準基底を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ とおくと $\mathbf{v}_1 = x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3$, $\mathbf{v}_2 = x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3$ となる。ここで

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1,\\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2,\\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

なる関係式、および命題 5.44 を用いて計算すると、

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 =&(x_1\mathbf{e}_1 + y_1\mathbf{e}_2 + z_1\mathbf{e}_3) \times (x_2\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + z_3\mathbf{e}_3)\\ =&(x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 + (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 + (z_1x_2 - x_1z_2)\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1\\ =&(x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{e}_3 + (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{e}_1 + (z_1x_2 - x_1z_2)\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

を得る。 □

注意 5.46. 上の公式は形式的に $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ を文字とみて、

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \mathbf{e}_1 \\ y_1 & y_2 & \mathbf{e}_2 \\ z_1 & z_2 & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$$

をサラスの公式で展開した式に等しい。

5.10.2. 平行六面体の体積と行列式. $\mathbf{0}$ でなく、平面上にない 3 つのベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ で、この順番で右手系となっているものを考える。この 3 つの平行六面体の体積 V をもとめよう。$\mathbf{v}_1$ と $\mathbf{v}_2$ でできる平行四辺形 P を底面として平行六面体の体積をもとめる。まず底面積 S は $\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|$ である。$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ は P と垂直なベクトルでなので $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ と $\mathbf{v}_3$ のなす角を θ とすると、高さは $\|\mathbf{v}_3\| \cdot \cos\theta$ であたえられる。したがって平行六面体の体積は内積の定義より、

$$V = \|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\| \cdot \|\mathbf{v}_3\| \cdot \cos\theta = (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$$

となる。いま $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ の成分表示を

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

とおくと、命題 5.45 を用いて、

$$\begin{aligned}(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= (x_1y_2 - y_1x_2)z_3 + (y_1z_2 - z_1y_2)x_3 + (z_1x_2 - x_1z_2)y_3\\ &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)\end{aligned}$$

となる。$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が左手系のときは $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3$ は右手系となることを考えれば、次の命題を得る。

命題 5.47. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ がこの順番で右手系（左手系）をなしているとする。このとき、この 3 つのベクトルの作る平行六面体の体積は $\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$（$-\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$）で与えられる。

上の命題から $\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ は平行六面体の符号付の体積と考えることもできる。