6. ベクトル空間 (ここから冬学期)

6.1. **ベクトル空間、部分空間.**

6.1.1. 抽象的なベクトル空間の定義. 定義 3.7 において n 次元の列ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ を

$$\mathbf{R}^n = \{ {}^t(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R} \quad (i = 1, \ldots, n)\}$$

によって定義した。列ベクトル空間には、和とスカラー倍が定義されていた。行ベクトルも同様に定義して、やはり和とスカラー倍が定義されていた。この章ではベクトル空間をより抽象化して、列ベクトルや行ベクトルについて考えることのできる議論を一般化して使える形に定式化することにしよう。このような考え方を公理化という。この章では抽象的なベクトル空間 V について成り立つ性質や定義を述べるが、V は列ベクトル空間のことを思い浮かべながら理解するとよい。まずはベクトル空間の公理を述べる。公理とは数学的対象の構造と、その満たすべき性質を列挙する定義のことである。

定義 6.1 (実ベクトル空間)**.** V を空でない集合とする。

(1) $v_1, v_2 \in V$ に対して和 $v_1 + v_2 \in V$ が定まっているとする。
(2) $v \in V$ と $r \in \mathbf{R}$ に対してスカラー倍 $rv \in V$ が定まっているとする。

さらにこの和とスカラー倍が次の条件を満たす時 V とその演算の組を実ベクトル空間（あるいは単にベクトル空間）という。演算が文脈から明らかな場合は、V を単にベクトル空間という。

(1) $v_1, v_2, v_3 \in V$ に対して $v_1 + v_2 = v_2 + v_1, (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$.
(2) *(零元の存在)* ある V の元 $\mathbf{0}$ が存在して任意の $v \in V$ に対して、$v + \mathbf{0} = v$ が成立する。
(3) *(逆元の存在)*V の任意の元 v に対して $-v \in V$ が存在して $v + (-v) = \mathbf{0}$ となる。
(4) V の任意の元 v に対して $1v = v$ が成立する。
(5) V の任意の元 v、$\mathbf{R}$ の任意の元 r, s に対して $r(sv) = (rs)v$ が成り立つ。
(6) V の元 v_1, v_2 および $\mathbf{R}$ の元 r_1, r_2 に対して分配法則 $(r_1 + r_2)v_1 = r_1v_1 + r_2v_1$, $r_1(v_1 + v_2) = r_1v_1 + r_1v_2$ が成り立つ。

n 次元の列ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ に対して標準的な和とスカラー倍を考えれば、ベクトル空間となる条件を確かめることは容易であるので、$\mathbf{R}^n$ はベクトル空間となる。また実数全体の集合 $\mathbf{R}$ を複素数全体の集合 $\mathbf{C}$ に変えることにより、複素ベクトル空間を定義することもできる。この章で現れる議論は実ベクトル空間でも複素ベクトル空間でも成り立つが、簡単のため、以下実ベクトル空間について議論することにする。

例 6.2. (1) 実係数一変数多項式の全体

$$\mathbf{R}[x] = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid n \geq 0, a_n, \ldots, a_0 \in \mathbf{R}\}$$

は通常の加法と実数倍でベクトル空間となる。実際加法と実数倍という演算で閉じていて上の *(1)*〜*(6)* の性質は明らかである。

(2) d を正の整数とする。このとき d 次以下の多項式（と 0）の全体

$$\mathbf{R}[x]_d = \{a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_d, \ldots, a_0 \in \mathbf{R}\}$$

も通常の加法と実数倍でベクトル空間となる。0 の次数は便宜的に $-\infty$ と定めることもある。

ベクトル空間について論じるとき次の部分空間の概念は基本的である。

命題 6.3 (部分空間)**.** V をベクトル空間として、W を V の空ではない部分集合とする。W が和とスカラー倍について閉じているとする。すなわち $w_1, w_2 \in W$, $r \in \mathbf{R}$ とするとき $w_1 + w_2 \in V, rw_1 \in V$ が成り立つとする。このとき W は V の演算でベクトル空間となる。

証明. 性質 (2)(3) 以外は明らかである。$\mathbf{0}$ が W の元であることは w を任意の W の元とすると $0w = \mathbf{0}$ は W の元であることがわかり V における零元であることから W の零元でもある。また W の元 w に対して、$(-1)w = -w$ も w の元となり、W における逆元でもあることが容易にわかる。 □

定義 6.4 (核,4.1 章参照)**.** $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を線形写像とする。このとき、集合は

$$\{v \in \mathbf{R}^n \mid f(v) = \mathbf{0}\}$$

を線形写像 f の核といい $\ker(f)$ と書く。

次の命題から $\ker(f)$ は $\mathbf{R}^n$ は部分空間の例を与えることがわかる。

命題 6.5. $\ker(f)$ は $\mathbf{R}^n$ の部分空間となる。

証明. $\ker(f)$ が和とスカラー倍について閉じていることを示せばよい。

(1) 和について閉じていること。$v_1, v_2 \in \ker(f)$ とする。このとき f が線形写像であることを用いれば、$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. 従って $v_1 + v_2 \in \ker(f)$

(2) スカラー倍について閉じていること。$v \in \ker(f)$, $r \in \mathbf{R}$ とする。このときやはり f が線形写像であることを用いれば、$f(rv) = rf(v) = r\mathbf{0} = \mathbf{0}$. 従って $rv \in \ker(f)$.

これから $\ker(f)$ は $\mathbf{R}^n$ の部分空間であることがいえる。 □

定義 6.6 (一次結合)**.** $v_1, \ldots, v_k$ を V の元とする。V をベクトル空間、

(1) $a_1v_1 + \cdots + a_kv_k \quad (a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{R})$ の形の V の元を $v_1, \ldots, v_k$ の一次結合という。

(2) $v_1, \ldots, v_k$ の一次結合全体のなす集合を $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ と書き、$v_1, \ldots, v_k$ で生成された部分空間という。すなわち、

$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{a_1v_1 + \cdots + a_kv_k \mid a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{R}\}$$

である。

命題 6.7. $v_1, \ldots, v_k$ で生成された部分空間は部分空間である。

証明. (1) まず加法について閉じていること。$w_1, w_2 \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ とする。このとき

$$w_1 = a_1v_1 + \cdots a_kv_k$$
$$w_2 = b_1v_1 + \cdots b_kv_k$$

と書けるので交換法則、結合法則、分配法則を用いて

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 =&(a_1v_1 + \cdots a_kv_k) + (b_1v_1 + \cdots b_kv_k) \\ =&(a_1v_1 + b_1v_1) + \cdots + (a_kv_k + b_kv_k) \\ =&(a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (a_kv_k + b_k)v_k \end{aligned}$$

となり、これもまた $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ の元となる。

(2) 次にスカラー倍について閉じていること。$w \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$, $r \in \mathbf{R}$ とする。このとき $w = a_1v_1 + \cdots a_kv_k$ と書くことができて、分配法則と掛け算に関する結合法則を用いて、

$$\begin{aligned} rw =&r(a_1v_1 + \cdots a_kv_k) = r(a_1v_1) + \cdots + r(a_kv_k) \\ =&(ra_1)v_1 + \cdots + (ra_k)v_k \end{aligned}$$

となり、$rw \in \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ となる。従って $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ は V の部分ベクトル空間となる。 □

6.2. **一次独立と生成系.** ベクトル空間の有限部分集合が与えられとき、それが一次独立であること、生成系であることを定義して、その性質を述べる。

定義 6.8. V をベクトル空間、$v_1, \ldots, v_n$ を V の元とする。

(1) $r_1, \ldots, r_n \in \mathbf{R}$ が $r_1v_1 + \ldots r_nv_n = \mathbf{0}$ であれば $r_1 = \cdots = r_n = 0$ をみたすとき、$v_1, \ldots, v_n$ は一次独立であるという。

(2) $v_1, \ldots, v_n$ が一次独立でないとき、一次従属であるという。

演習問題 6.9. $\mathbf{R}^4$ において

$$v_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1 & 4 & 9 & 0\end{pmatrix},$$

とするとき v_1, v_2, v_3 は一次独立か？

定義 6.10 (生成系、有限生成ベクトル空間)**.** (1) V をベクトル空間、$v_1, \ldots, v_n$ を V の元とする。$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = V$ となるとき $v_1, \ldots, v_n$ を V の生成系という。(一般には無限個の元に対してもそれば V の生成系であることが定義されるが、ここではそれは割愛する。)

(2) V を有限個の元からなる生成系 $\{v_1, \ldots, v_r\}$ をもつとき、V を有限生成ベクトル空間という。

注意 6.11. あとで有限次元ベクトル空間という言葉が出てくる。これもあとでわかることだが、有限次元ベクトル空間と有限生成ベクトル空間は同値であることが示される。この同値が示された後では、二つの言葉は区別しなくてもよい。

演習問題 6.12. $v_1 = (1, 3), v_2 = (2, 3), v_3 = (1, 1)$ としたとき v_1, v_2, v_3 は $\mathbf{R}^2$ を生成するか？

補題 6.13. (1) $v_1, \ldots, v_r$ が一次独立であれば、その部分集合 $v_1, \ldots, v_s$ $(s < r)$ も一次独立である。

(2) $v_1, \dots, v_s$ が生成系であれば、それを含む集合 $v_1, \dots, v_r$ $(s < r)$ も生成系である。

(3) $v_1, \dots, v_r$ は一次独立として、

$$a_1v_1 + \cdots + a_r = b_1v_1 + \cdots + b_r$$

とする。このとき $a_1 = b_1, \dots, a_r = b_r$ となる。

証明. (1) $a_1v_1 + \dots a_sv_s = 0$ であるとすれば、$a_1v_1 + \dots a_sv_s + 0v_{s+1} + \cdots 0v_r = 0$ であるので、$v_1, \dots, v_r$ が一次独立であることを用いれば、$a_1 = \cdots = a_r = 0$ が得られる。これは $v_1, \dots, v_s$ が一次独立であることを意味する。

(2) $v_1, \dots, v_s$ は生成系である。今 $w \in V$ とすると、$w = a_1v_1 + \cdots a_sv_s$ と書けるので $w = a_1v_1 + \cdots a_sv_s + 0v_{s+1} + \cdots + 0v_r$ と書け、$v_1, \dots, v_r$ の一次結合として書ける。従って $v_1, \dots, v_r$ は V の生成系となる。

(3) $a_1v_1 + \cdots + a_rv_r = b_1v_1 + \cdots + b_rv_r$ を移項して

$$\begin{aligned} 0 =& (a_1v_1 + \cdots + a_rv_r) - (b_1v_1 + \cdots + b_rv_r) \\ =& (a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_r - b_r)v_r \end{aligned}$$

となるが、$v_1, \dots, v_r$ は一次独立であるので、$a_1 - b_1 = \cdots = a_r - b_r = 0$ となる。したがって $a_1 = b_1, \dots, a_r = b_r$ となる。 □

6.3. **基底の存在と次元.**

定義 6.14. V をベクトル空間として $v_1, \dots, v_n$ を V の元とする。$v_1, \dots, v_n$ が一独立であり、かつ生成系となっているとき V の基底という。

例 6.15. (1) $\mathbf{R}^n$ の元 e_i を ${}^t(0, \dots, \overset{i\text{ 番目}}{1}, \dots, 0)$ で定義すると $e_1, \dots, e_n$ は基底となる。

(2) $\mathbf{R}^2$ の元 v_1, v_2 を $v_1 = {}^t(1, 2), v_2 = {}^t(1, 1)$ とすると、v_1, v_2 は $\mathbf{R}^2$ の基底になる。

上の例の様にベクトル空間に基底が存在したとしてもその取り方は一通りではない。しかし、次の定理により、有限生成ベクトル空間には基底が存在して、その個数が基底の取り方によらないこといえる。

定理 6.16. V を有限生成ベクトル空間には基底が存在する。さらにその個数は基底の取り方によらない。

命題 6.17. (1) V の元 $v_1, \dots, v_r$ が一次独立で、$w_1, \dots, w_s$ が生成系であるとすると、$r \leq s$ となる。

(2) $v_1, \dots, v_r$ が個数が最少の生成系であるとすると、これは一次独立である。とくにこれは基底である。

証明. (1) s に関する帰納法で示す。

$s = 1$ のとき。V は w_1 で生成される。$w_1 = 0$ のときは $V = \{0\}$ となり、$r \geq 1$ に対して、$v_1, \dots, v_r$ が一次独立であるとすると、$v_1 = \cdots = v_r = 0$ なので非自明な関係式があり一次独立性に $r = 0$ でなくてはならない。$w_1 \neq 0$ であれば、$V = \{rw_1 \mid r \in \mathbf{R}\}$ である。$v_1 = r_1w_1, v_2 = r_2w_1$ は、r_1, r_2 のいずれ

かが 0 でなければ、$r_1v_2 - r_1v_2 = 0$ となり一次独立ではない。また両方が 0 であっても一次独立にはならない。

$v_1, \dots, v_r \in \langle w_1, \dots, w_{s-1}\rangle$ であれば帰納法の仮定から $r \le s-1$ より $r \le s$ が言える。従って必要であれば $v_1, \dots, v_r$ の順番を変えて、$v_r \notin \langle w_1, \dots, w_{s-1}\rangle$ であると仮定してよい。このとき

$$v_r = a_{r1}w_1 + \cdots + a_{rs}w_s$$

とあらわすと、$a_{rs} \neq 0$ となる。生成系 $w_1, \dots, w_s$ を用いて $v_1, \dots, v_{r-1}$ を

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}w_1 + \cdots + a_{1s}w_s \\ &\cdots \\ v_{r-1} &= a_{r-1,1}w_1 + \cdots + a_{r-1,s}w_s \end{aligned}$$

とあらわす。この表示に表れる係数を用いて

$$\kappa_1 = \frac{a_{1s}}{a_{rs}}, \dots, \kappa_{r-1} = \frac{a_{r-1,s}}{a_{rs}}$$

と定めると、$v_1' = v_1 - \kappa_1 v_r, \dots, v_{r-1}' = v_{r-1} - \kappa_{r-1}v_r \in \langle w_1, \dots, w_{s-1}\rangle$ となる。ここで $v_1', \dots, v_{r-1}'$ が一次独立であることを示そう。実際 $a_1v_1' + \cdots a_{r-1}v_{r-1}' = 0$ であるとすると、

$$\begin{aligned} 0 =& a_1(v_1 - \kappa_1 v_r) + \cdots + a_{r-1}(v_{r-1} - \kappa_{r-1}v_r) \\ =& a_1v_1 + \cdots + a_{r-1}v_{r-1} - (a_1\kappa_1 + \cdots + a_{r-1}\kappa_{r-1})v_r \end{aligned}$$

となる。ここで $v_1, \dots, v_r$ が一次独立であることを用いると、$a_1 = \cdots = a_{r-1} = 0$ となる。したがって $v_1', \dots, v_{r-1}'$ は一次独立となる。従って s に関する帰納法の仮定から $r-1 \le s-1$ が言える。

(2) もし一次従属であるとすると、

$$a_1w_1 + \cdots + a_sw_s = 0$$

なる非自明な関係式があるが、たとえば $a_s \neq 0$ であれば、$w_s \in \langle w_1, \dots, w_{s-1}\rangle$ となり個数の最少性に反する。 □

定理 *6.16* の証明. 生成系は存在するので、そのなかで個数の最小のものを $\{v_1, \dots, v_n\}$ とする。このとき命題 6.17(2) により基底であることがわかる。従って基底は存在する。また $\{w_1, \dots, w_m\}$ も基底であるとすると、命題 6.17(1) により $\{v_1, \dots, v_n\}$ は一次独立、$\{w_1, \dots, w_m\}$ は生成系であるので $n \le m$ となる。$\{v_1, \dots, v_n\}$ は生成系、$\{w_1, \dots, w_m\}$ は一次独立であることから逆の不等式も成立するので $m = n$ となる。 □

定義 6.18. V を有限生成ベクトル空間とする。基底の個数を次元といい $\dim(V)$ と書く。有限生成ベクトル空間を有限次元ベクトル空間といってもよい。以下有限次元ベクトル空間と呼ぶことにする。

命題 6.19. 有限次元ベクトル空間 V の部分空間 W は有限次元ベクトル空間となる。

証明. $v_1,\dots,v_s$ を W の元で一次独立なものであるとする。このとき $s\le\dim(V)$ なのでその中で個数が最大のものをとる。このとき W が $v_1,\dots,v_r$ で生成される。実際、もし生成されないとすると、$w\notin\langle v_1,\dots,v_r\rangle, w\in W$ となる w がとれる。関係式 $a_1v_1+\cdots+a_rv_r+bw=0$ があったとして $b\ne0$ であれば、

$$w=-\frac{1}{b}(a_1v_1+\cdots+a_rv_r)$$

となり $w\notin\langle v_1,\dots,v_r\rangle$ に反する。従って $b=0$ でなくてはならず、このとき $v_1,\dots,v_r$ の独立性から $a_1=\cdots=a_r=0$ となり $v_1,\dots,v_r,w$ は一次独立となり個数の最大性に反する。

従って $v_1,\dots,v_r$ は W の基底となる。 □

7. 線形写像再論

7.1. **線形写像と表現行列.** $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形写像は 3.1 章で行列表現は 3.2 章で扱ったが、ここでは抽象ベクトル空間の線形写像と行列表示を扱う。以下ベクトル空間は抽象ベクトル空間を意味するものとする。列ベクトル空間の場合に定義したものはここでやる定義と一致する。この章ではベクトル空間はすべて有限次元ベクトル空間とする。

7.1.1. 線形写像と表現行列. V,W をベクトル空間とする。

定義 7.1. 写像 $f:V\to W$ が線形写像であるとは

(1) $v_1,v_2\in V$ に対して $f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)$
(2) $v\in V$, $r\in\mathbf{R}$ に対して $f(rv)=rf(v)$

が成り立つことである。

これは $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ の場合に定義したものの一般化である。

命題 7.2. V, W をそれぞれ n,m 次元（有限次元）ベクトル空間として、$\{v_j\}$, $\{w_i\}$ をそれぞれの基底とする。

(1) $(a_{ij})_{ij}$ を (m,n) 行列とする。V の元を $v=\sum_{j=1}^n r_jv_j$ と一意的にあらわせる。この表示を用いて $f(v)=\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n a_{ij}r_jw_i$ と定めることにより線形写像 $f:V\to W$ が定まる。
(2) $f:V\to W$ なる線形写像とする。$f(v_j)=\sum_{i=1}^m a_{ij}w_i$ と一意的に表すことができる。ここで $(a_{ij})_{ij}$ は (m,n) 行列である。この行列を用いて (1) の形で線形写像をつくると、これは f に一致する。

上の対応 (1), (2) により V から W への線形写像の全体のなす集合と (m,n) 行列の全体のなす集合は 1 対 1 に対応する。

証明. (1) V の元 x, y を $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$ と表すと、$x + y = \sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j)v_j$ となる。そこで $f(x) + f(y)$ を定義に従って計算すると、

$$
\begin{aligned}
f(x) + f(y) =& \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j w_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j w_i \\
=& \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j + y_j)w_i \\
=& f(x + y)
\end{aligned}
$$

となる。また $r \in \mathbf{R}$ とすると $rx = \sum_{j=1}^{n} rx_j v_j$ である。$rf(x)$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
rf(x) =& r\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j w_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}rx_j w_i \\
=& f(rx)
\end{aligned}
$$

となり、f が線形写像であることが示された。

(2) $v = \sum_{j=1}^{n} r_j v_j$ として $f(v_j)$ が (2) の形で与えられているとすると $f(v)$ は

$$
\begin{aligned}
f(v) = f(\sum_{j=1}^{n} r_j v_j) &= \sum_{j=1}^{n} f(r_j v_j) \\
= \sum_{j=1}^{n} r_j f(v_j) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} r_j a_{ij} w_i
\end{aligned}
$$

となり、$(a_{ij})_{ij}$ から (1) の形で定義したものと一致する。 □

上の命題は線形写像は基底の行き先さえ決まれば、写像として一意的に決まってしまうということを言っている。

定義 7.3. $A = (a_{ij})$ を基底 $\{v_j\}, \{w_i\}$ に関して f に対応する行列、あるいは基底 $\{v_j\}, \{w_i\}$ に関する表現行列という。また f の行列表示ということもある。

例 7.4. V を 3 次以下の多項式のなすベクトル空間、D を微分する写像とするとこれは V から V への線形写像である。基底を $\{1, x, x^2, x^3\}$ の順番にならべて、この写像を行列表示してみよう。

例 7.5. $A = (a_{ij})$ を (m, n) 行列、$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ を $f(v) = Av$ で定義される線形とする。$e_i = {}^t(0, \ldots, \overset{i\,\text{番目}}{1}, \ldots, 0)$ とすると $e_1, \ldots, e_n$ は $\mathbf{R}^n$ の基底、$e_1, \ldots, e_m$ は $\mathbf{R}^m$ の基底となるが、この基底に関する f の表現行列を求めてみると、$j = 1, \ldots, n$ に対して、

$$
f(e_j) = {}^t(a_{1j}, \ldots, a_{mj}) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i
$$

なので、f の表現行列は A となる。定理 *3.13* で定義した f に対応する行列とここで定義した表現行列は一致する。

7.1.2. 合成と表現行列の積.

命題 7.6. 合成と表現行列の積は対応する。V, W, U をそれぞれ n, m, l 次元のベクトル空間、$\{v_k\}, \{w_j\}, \{u_i\}$ をそれぞれの基底とする。さらに $f : V \to W, g : W \to U$ を線形写像とする。また f, g に対応する行列をそれぞれ $A = (a_{jk})$, $B = (b_{ji})$ とする。このとき $g \circ f$ は線形写像となる。そして $g \circ f$ に対応する行列 C は BA となる。

証明. まず合成 $g \circ f$ が線形写像になることを確かめよう。
(1) $v_1, v_2 \in V$ とする。このとき

$$\begin{aligned}(g \circ f)(v_1 + v_2) =& g(f(v_1 + v_2)) = g(f(v_1) + f(v_2)) \\ =& g(f(v_1)) + g(f(v_2)) = (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2)\end{aligned}$$

となる。
(2) $v \in V$, $r \in \mathbf{R}$ とする。このとき

$$(g \circ f)(rv) = g(f(rv)) = g(rf(v)) = rg(f(v)) = r(g \circ f)(v)$$

となる。したがって $g \circ f$ は線形写像である。
v_k の $g \circ f$ による像、つまり行先を計算する。

$$\begin{aligned}g \circ f(v_k) =& g(\sum_{j=1}^{m} a_{jk} w_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{jk} g(w_j) \\ =& \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{l} a_{jk} b_{ij} u_i = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} a_{jk} b_{ij} u_i\end{aligned}$$

したがって $g \circ f$ に対応する行列は BA となる。 □

7.1.3. 基底の取換えと表現行列. 基底をとりかえると行列が変換される。

命題 7.7. V の二つの基底を $\{v_i\}$, $\{v'_s\}$ とする。$P = (p_{is})$, $P' = (p'_{si})$ を $v_i = \sum_{s=1}^{n} p'_{si} v'_s$, $v'_s = \sum_{i=1}^{n} p_{is} v_i$ によって定まる行列とすると $P'P = PP' = I_n$ となる。とくに P, P' は正則行列である。

証明. v_i を変形する。

$$v_i = \sum_{s=1}^{n} p'_{si} v'_s = \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p'_{si} p_{js} v_j$$

したがって $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{js} p'_{si} = \delta_{ji}$ となり $PP' = I_n$ となる. $P'P = I_n$ も同様である。 □

命題 7.8. V, W をそれぞれ n, m 次元のベクトル空間とする。$f : V \to W$ を線形写像、$\{v_j\}$ と $\{v'_t\}$ を V の二つの基底、$\{w_i\}$ と $\{w'_s\}$ を W の二つの基底とする。$P = (p_{jt}), Q = (q_{is})$ を $v'_t = \sum p_{jt} v_j$, $w'_s = \sum q_{is} w_i$ によって定まる行列とする。$\{v_j\}, \{w_i\}$ に関するの f の行列表示を $A = (a_{ij})$、$\{v'_t\}, \{w'_s\}$ に関する f の行列表示を $A' = (a'_{st})$ とする。このとき $A = QA'P^{-1}$ となる。

証明. P の逆行列を $P' = (p'_{tj})$ とおくと、命題 7.7 から $v_j = \sum p'_{tj} v'_t$ となる。$\{v_j\}, \{w_i\}$ に関する f の行列表示を求めるために $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$ を計算する。

$$\begin{aligned} f(v_j) =& f(\sum_{t=1}^n p'_{tj} v'_t) = \sum_{t=1}^n p'_{tj} f(v'_t) = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^m p'_{tj} a'_{st} w'_s \\ =& \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^m p'_{tj} a'_{st} q_{is} w_i \end{aligned}$$

したがって w_i の係数を比較して

$$a_{ij} = \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^m q_{is} a'_{st} p'_{tj}$$

となる。したがって $A = QA'P^{-1}$ となる。 □