7.2. **階数と次元.**

7.2.1. 像と核、階数の二つ目の定義. V, W をベクトル空間として、$f : V \to W$ を線形写像とする。

定義 7.10 (核、像). (1) f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ を

$$\{v \in V \mid f(v) = \mathbf{0}\}$$

なる V の部分集合として定義する。

(2) f の像 $\mathrm{Im}(f)$ を

$$\{f(v) \mid v \in V\}$$

なる W の部分集合として定義する。

(3) ある線形写像 $g : W \to V$ が存在して $g \circ f$ と $f \circ g$ が恒等写像となるときに g を逆写像といい、f に対する逆写像が存在するときに f は同型であるという。また V から W への同型が存在するときに V, W は同型であるという。

命題 7.11. (1) f の核 $\mathrm{Ker}(f)$ と像 $\mathrm{Im}(f)$ はそれぞれ V, W の部分空間となる。

(2) V と W が同型であるとするとその次元は等しい。

証明. それぞれ和とスカラー倍について閉じていることを示せばよい。

(1) $\mathrm{Ker}(f)$ について。$v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}(f), r \in \mathbf{R}$ とする。このとき $f(v_1) = f(v_n) = \mathbf{0}$ なので

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad f(rv_1) = rf(v_1) = r\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

なので $v_1 + v_2, rv_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ となる。したがって $\mathrm{Ker}(f)$ は部分空間となる。

$\mathrm{Im}(f)$ について。$v_1, v_2 \in \mathrm{Im}(f), r \in \mathbf{R}$ とする。このときある $v_1, v_2 \in W$ が存在して、$f(v_1) = w_1, f(v_2) = w_2$ となるので

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2), \quad rw_1 = rf(v_1) = f(rv_1)$$

となるので、$w_1 + w_2 \in \mathrm{Im}(f), rw_1 \in \mathrm{Im}(f)$ となる。したがって $\mathrm{Im}(f)$ は部分空間となる。

(2) $f : V \to W$ が V から W への同型とする。さらに $v_1, \ldots, v_n$ を V の基底であるとする。まず、$f(v_1), \ldots, f(v_n)$ が一次独立であることをしめそう。$a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ として

$$a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) = f(a_1 v_1 + \cdots a_n v_n) = \mathbf{0}$$

とすると、f の単射性から $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \mathbf{0}$ がわかり、さらに $v_1, \ldots, v_n$ の一次独立性から $a_1 = \cdots = a_n = 0$ が従う。従って $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ は一次独立である。$f(v_1), \ldots, f(v_n)$ が生成系であることしめそう。まず全射性から任意の $w \in W$ に対してある $v \in V$ が存在して $w = f(v)$ となる。$v_1, \ldots, v_n$ は V の生成系なので $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ と書ける。従って

$$w = f(v) = f(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$$

となる。w は任意だったから、$f(v_1), \ldots, f(v_n)$ が生成系であることがわかる。

以上のことから $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ は V の基底となることがわかり、W の次元は n となることがわかる。 □

命題 7.12. V,W をベクトル空間 $f:V\to W$ を線形写像とする。

(1) f が単射であることと $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$ であることは同値である。
(2) 線形写像が全単射であれば同型となる。また、$n\times n$ 行列 F によって表現される線形写像が同型であることと F が正則行列であることは同値である。

証明. (1) f が単射であるとする。$v\in\mathrm{Ker}(f)$ とするとこのとき $f(\mathbf{0})=\mathbf{0}=f(v)$ なので f の単射性を用いて、$v=\mathbf{0}$ を得るので、$\mathrm{Ker}(f)=\{\mathbf{0}\}$ となる。逆に $\mathrm{Ker}(f)=\{\mathbf{0}\}$ とすると、$f(v_1)=f(v_2)$ とすると、$f(v_1-v_2)=f(v_1)-f(v_2)=\mathbf{0}$ なので $v_1-v_2\in\mathrm{Ker}(f)$ となり、$v_1-v_2=\mathbf{0}$ となる。したがって f は単射となる。

(2)f が全単射であるとして、その逆写像を g としたときにこれが線形写像であることを示せばよい。$w_1,w_2\in W$ として、$w_1=f(v_1),w_2=f(v_2)$ とおくと $v_1=g(w_1),v_2=g(w_2)$ であり、

$$f(v_1+v_2)=f(v_1)+f(v_2)=w_1+w_2,\quad f(rv_1)=rf(v_1)=rw_1$$

なので $g(w_1+w_2)=v_1+v_2=g(w_1+g(w_2)$, $g(rw_1)=rv_1=rg(w_1)$ となる。これは g が線形写像であることを意味する。V,W の基底 $v_1,\dots,v_n$, $w_1,\dots,w_n$ とする。この基底に関する f,g の表現行列をそれぞれ F,G とすると、$f\circ g,g\circ f$ が恒等写像のなで、FG,GF は単位行列となる。従って F,G は正則行列である。また F が正則行列であれば、G をその逆行列であるとすると、FG,GF は単位行列となるので G に対応する線形写像は、F に対応する線形写像の逆写像となり F は同型となる。

□

定義 7.13. V,W をベクトル空間、$f:V\to W$ を線形写像とする。$\mathrm{Im}(f)$ の次元を f の階数といい、$\mathrm{rank}(f)$ と書く。

命題 7.14. V,W をそれぞれ n 次元、m 次元のベクトル空間とする。$f:V\to W$ を線形写像、$\{v_j\}_{i=1,\dots,n},\{w_i\}_{i=1,\dots,m},$ をそれぞれ V,W の基底とする。この基底により定まる f の表現行列を A とする。このとき A の行列としての階数と線形写像 f の階数は一致する。ここで行列 A の階数とは行基本変形と列の入れ替えを繰り返して

$$\begin{pmatrix} I_r & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

の形に変形したときの r である。また、さらに *§4.3.2* の列基本変形をもちいれば、*(7.1)* と同じ r に対して、

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2}$$

の形にできる。

証明. (7.1) の形から、さらに列基本変形をすることにより (7.2) の形にできることは、明らかである。基本行列の積で表される行列 P,Q が存在して PAQ が (7.2) の行列の形となるとする。このとき、V,W の基底を取り換えるて、f の表現行列を PAQ の形にすることができる。その取り換えたあとの基底を

$\{v'_j\}, \{w'_i\}$ とおく。このとき f の像は $w'_1, \dots, w'_r$ で生成されるベクトル空間となり、その次元は r である。 □

系 7.15. 行列を基本変形して得られる階数 r はその変形の仕方によらない。

7.2.2. 行列式と階数.

定義 7.16 (小行列式). A を $m \times n$ 行列として、$1 \le p \le \min(m, n)$ とする。$1 \le i_1 < \cdots < i_p \le n$, $1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n$ として i_1 行目、... i_p 行目、および j_1 列目、... j_p 列目、を抜き出した行列を $A(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_p)$ と書き A の小行列という。$A(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_p)$ の行列式 $D(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_p) = \det A(i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_p)$ を A の小行列式という。p を小行列式の次数という。

命題 7.17.
(1) $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ とする。$v_1, \dots, v_n$ の中の一次独立なものの最大個数は V の次元と一致する。
(2) A を $m \times n$ 行列とする。A の階数は 0 でない小行列式の次数の最大と一致する。

証明. (1) 個数が最大の一次独立な部分集合は V を生成する。従って次元と一致する。(2) 0 でない小行列式の次数の最大を r' とする。A に対応する線形写像を f とおく。次数 r の小行列式 $D(I, J)$, $I = (i_1, \dots, i_r)$, $J = (j_1, \dots, j_r)$ で 0 でないものがあれば、$j_1, \dots, j_r$ 列は一次独立なので $\mathrm{rank}(f) = \dim \mathrm{Im}(f) \ge r$ となる。従って $\mathrm{rank}(f) \ge r'$

$\mathrm{rank}(f)$ は列ベクトル $v_1, \dots, v_n$ で生成されるベクトル空間の次元なのでその中から r 個で一次独立なものが取れる。これを $v_1, \dots, v_r$ とする。これらを並べてできる行列の行を r 個とってその行列式が 0 でないようにできればよい。これを r に関する帰納法で証明する。$r = 1$ のときは明らか。$v_1, \dots, v_{r-1}$ に対してその $r-1$ 行かりに $1, \dots, r-1$ 行目を選んで正則行列になったとする。v_r の $1, \dots, r-1$ 行目 v'_r は $v_1, \dots, v_{r-1}$ の $1, \dots, r-1$ 行目 $v'_1, \dots, v'_{r-1}$ の一次結合として表せる。

$$v'_r = \sum_i a_i v'_i$$

ここで $v_r - \sum_i a_r v_r = 0$ なら一次独立性に反するので、零ベクトルではなく、$1, \dots, r-1$ 行目は 0 である。その 0 でない行が存在する。例えばそれが r 行目であるとすると、$v_1, \dots, v_r$ の $1, \dots, r$ 行目を $v''_1, \dots, v''_r$ とするとそれを並べてできる行列の行列式は $v''_1, \dots, v''_{r-1}, v''_r - \sum_i a_i v''_i$ を並べてできる行列式と一致し、これは 0 でないことがわかる。 □

7.2.3. 次元公式.

命題 7.18. V, W を有限次元ベクトル空間とし $f : V \to W$ を線形写像とする。このとき $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V$.

証明. $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = k$, $\dim(\mathrm{Im}(f)) = r$ とする。$\mathrm{Im}(f)$ の基底を $w'_1, \dots, w'_r$ として、$\mathrm{Ker}(f)$ の基底を $v_1, \dots, v_k$ とする。また $i = 1, \dots, r$ に対して $f(w_i) = w'_i$ なる $w_i \in V$ をとる。このとき $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_r$ が V の基底となることを証明しよう。

(1) 一次独立であること。$a_1v_1+\cdots+a_kv_k+b_1w_1+\dots b_rw_r=0$ とする。このとき $i=1,\dots,k$ に対して $f(v_i)=0$ なので、

$$\begin{aligned}0=&f(a_1v_1+\cdots+a_kv_k+b_1w_1+\cdots+b_rw_r)\\=&a_1f(v_1)+\cdots+a_kf(v_k)+b_1f(w_1)+\cdots+b_rf(w_r)\\=&b_1w_1'+\cdots+bw_r'\end{aligned}$$

ここで $\{w_i\}$ の一次独立性を用いて、$b_1=\cdots=b_r=0$ となる。従って、$a_1v_1+\cdots+a_kv_k=0$ となる。ここで $\{v_i\}$ の一次独立性をもちいれば、$a_1=\cdots=a_k=0$ となる。従って $v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_r$ は一次独立である。

(2) 生成系となること。$v\in V$ とする。このとき $f(v)$ は基底 $w_1',\dots,w_r'$ の一次結合として表されるので

$$f(v)=b_1w_1'+\cdots+b_rw_r'$$

と書ける。$v'=v-(b_1w_1+\dots b_rw_r)$ とおくと

$$f(v')=f(v)-(b_1f(w_1)+\cdots+b_rf(w_r))=f(v)-(b_1w_1'+\cdots+b_rw_r')=0$$

となる。従って v' は $\mathrm{Ker}(f)$ の元となる。従って基底 $\{v_i\}$ を用いて $v'=a_1v_1+\cdots+a_kv_k$ と書ける。従って

$$\begin{aligned}v-(b_1w_1+\dots b_rw_r)&=a_1v_1+\cdots+a_kv_k\\v&=a_1v_1+\cdots+a_kv_k+b_1w_1+\dots b_rw_r\end{aligned}$$

となり、$v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_r$ の一次結合として書かれた。したがって、これは生成系になっている。 □

7.2.4. 連立一次方程式論への補足. その応用として、非斉次の連立一次方程式の解法を与えよう。解の存在をベクトル空間の記号で書くことにする。

命題 7.19. $A=(a_{ij})$ を $m\times n$ 行列として、$b=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$ を m 次元の列ベクトルとする。$f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ を A に対応する線形写像とする。この時次は同値

(1) 連立方程式
$$A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$
に解が存在する。

(2) b は $\mathrm{Im}(f)$ の元である。

(3) A の列ベクトルを $v_1,\dots,v_n$ とするとき $\dim(\langle v_1,\dots,v_n\rangle)=\dim(\langle v_1,\dots,v_n,b\rangle)$

(4)
$$\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A,b)$$

証明. $\mathbf{e}_i$ を $\mathbf{R}^n$ の基本単位ベクトルとすると、上の $f(\mathbf{e}_i)=v_i$ なので

$$A\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1v_1+\cdots+x_nv_n=f(x_1\mathbf{e}_1+\dots x_n\mathbf{e}_n)$$

となる。また $\langle v_1,\ldots,v_n\rangle \subset \langle v_1,\ldots,v_n,b\rangle$ であり、これらの次元が等しいことは $b\in\langle v_1,\ldots,v_n\rangle$ は同値である。 □

8. 固有値、固有ベクトル、行列の対角化

この章ではスカラーは実数または複素数とする。これまでの議論のほとんどはスカラーを複素数としてもそのまま成立する。特に注意が必要である場合には断ることにする。

8.1. **固有値、固有ベクトル.**

8.1.1. 固有値、固有ベクトルの定義.

定義 8.1. (1) A を $n\times n$ 行列とする。このとき、0 でないベクトル v と、あるスカラー λ が存在して、

$$Av=\lambda v$$

が成り立つとき、v を A の固有ベクトル、λ を v に対応する固有値という。また v を固有値 λ に属する固有ベクトルという。

(2) V を有限次元ベクトル空間とする。f を V から V への線形写像とする。このとき、0 でないベクトル v と、あるスカラー λ が存在して、

$$f(v)=\lambda v$$

が成り立つとき、v を f の固有ベクトル、λ を v に対応する固有値という。また v を固有値 λ に属する固有ベクトルという。

注意 8.2. v が A の固有値であれば、零でないスカラー a を掛けると av を A の固有値であることがわかる。一つの固有値に属する固有ベクトルは一つではない。V から V への線形写像の場合も同様である。

次の命題は線形写像の核の定義から明らかである。

命題 8.3. A を $n\times n$ 行列として、λ を行列 A の固有値とする。λ に属する固有ベクトルの集合は

$$\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)-\{0\}$$

と一致する。また λ が A の固有値であるための必要十分条件は $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)\neq\{0\}$ である。

定義 8.4. $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$ を固有値 λ の固有空間という。従って λ の固有空間で零でないもの全体は λ に属する固有ベクトルの集合と一致する。

8.1.2. 固有方程式、固有多項式. この章ではスカラーは複素数とする。

定義 8.5. A を n 次正方行列とする。A の固有多項式 $\Phi_A(t)$ を $\Phi_A(t)=\det(tI_n-A)$ で定義する。すぐわかるように、$\Phi_A(t)$ は t の n 次のモニック多項式（最高次の係数が 1 の多項式）である。

定理 8.6. A を n-次正方行列とし、$\Phi_A(t)$ を A の固有多項式であるとする。λ が A の固有値であるための必要十分条件は

$$\Phi_A(\lambda)=0$$

となることである。

証明. λ が固有値であることと $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)$ が $\{0\}$ でないことは同値で、これは $\dim\mathrm{Ker}(A-\lambda I_n)\geq 0$ と同値になり、命題 7.18 を考えれば $\dim(Im(f))<n$ と同値になる。これは $\det(\lambda I_n-A)=(-1)^n\det(A-\lambda I_n)=0$ と同値である。 □

次の定理は代数学の基本定理と呼ばれる定理である。その証明はこの講義の範囲を超えているので、ここでは省略する。

定理 8.7. $f(x)$ を複素数係数の多項式でその次数は 1 以上であると仮定する。このとき $f(x)=0$ は複素数解をもつ。

上の定理と因数定理を繰り返し用いることにより次の系が得られる。

系 8.8. $f(x)$ を上のような n 次多項式で最高次の係数を a_n とおく。このとき相異なる複素数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ が存在して

$$f(x)=a_1(x-\lambda_1)^{m_1}\cdots(x-\lambda_k)^{m_k}\quad(m_1,\ldots,m_k\geq 1)$$

と書ける。この m_i を根 λ_i の重複度という。このとき $m_1+\cdots+m_k=n$ となる。$m_i\geq 2$ となる λ_i を $f(x)=0$ の重根という。

系 8.9. n 次の正方行列には必ず固有値がある。またそれらは重複度も込めて、n 個ある。