8.2. **行列の対角化.**

定義 8.10. A を $n \times n$ 行列とする。正則行列 P と対角行列

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

が存在して、

$$A = PDP^{-1}$$

となるとき、A は対角化可能であるという。このタイプの対角行列を $\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ と書く。

定理 8.11. A を n-次正方行列とする。次は同値である。

(1) A は対角化可能である。
(2) A の固有ベクトルからなる $\mathbf{C}^n$ の基底がとれる

証明. A の固有ベクトルからなる基底を $v_1, \dots, v_n$ とすると、$Av_1 = \lambda_1 v_1, \dots, Av_n = \lambda_1 v_n$ なので $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ とおけば、

$$A(v_1, \dots, v_n) = (v_1, \dots, v_n)D$$

となる。従って $P = (v_1, \dots, v_n)$ とおけば正則行列となり、$A = PDP^{-1}$ となる。

逆に A が対角化可能であったとすると、$A = PDP^{-1}$ となる正則行列 A と対角行列 D が存在する。$P = (v_1, \dots, v_n)$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ とおけば、$AP = PD$ から

$$Av_i = \lambda_i v_i$$

となり、固有ベクトルからなる基底が存在する。 □

例 8.12. 行列 $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & -6 \\ -6 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ を対角化してみよう。まず A の固有方程式から固有値を求める。

$$\det(tI_3 - A) = \begin{vmatrix} t+4 & 1 & 6 \\ 6 & t-1 & 6 \\ -2 & -1 & t-4 \end{vmatrix} = t^3 - t^2 - 4t + 4 = (t-2)(t+2)(t-1)$$

となる。したがって $t = 2, -2, 1$ が固有値となる。

まず固有値 $\lambda_1 = 2$ に属する固有ベクトル v_1 を求める。この固有ベクトルとは、

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -6 \\ -6 & -1 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の核の 0 でない元のことであるので、連立一次方程式 $(A - 2I_3)v_1 = 0$ を解いて、0 でない解を一つ選べばよい。計算すると、$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ が 0 でない一つ

の解となっている。従って、これが 2 に対する固有ベクトルとなっている。ここまでの計算が正しいければ $Av_1 = 2v_1$ となっているはずであるので、各自これをチェックすること。

同様にして、固有値 $\lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$ に属する固有値 v_2, v_3 を求めると、$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ととれることがわかる。従って

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば、$AP = PD$ となる。v_1, v_2, v_3 が基底になるためには P が正則行列であることが必要十分である。B の逆行列は実際存在して、

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となるので、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

となる。これが A の対角化である。

注意 8.13. A の対角化は固有ベクトルからなる基底の順番を取りかえると形は変わる。また固有ベクトルからなる基底を 0 でないスカラー倍をしても固有ベクトルからなる基底となるので、そのように取り換えても、対角化の形は変わる。

上の例では固有方程式には重根はなく、固有値は 3 つあり、それぞれの固有値に属する固有ベクトルを考えれば基底となった。一般に固有値に重根がない場合について、次の定理が成り立つ。

命題 8.14. $v_1, \dots, v_k$ を異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ に属する固有ベクトルとする。このとき $v_1, \dots, v_k$ は一次独立である。

証明. $v_1, \dots, v_k$ に対して

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0$$

なる関係式があったとする。このとき A をほどこして

$$\lambda_1 a_1 v_1 + \cdots + \lambda_k a_k v_k = 0$$

なる関係式が得られる。さらに A を何回か繰り返してほどこして

$$\lambda_1^i a_1 v_1 + \cdots + \lambda_k^i a_k v_k = 0$$

が得られる。$(i=0,\dots,k-1)$. 従って

$$V=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{k-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{k-1}\\ \vdots & & & & \vdots\\ 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \dots & \lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}$$

とおけば、

$$\big(a_1v_1,\dots,a_kv_k\big)\,V=0$$

となる。他方、λ_i はすべて異なるので、ファンデルモンド行列式

$$\det V=\prod_{i<j}(\lambda_j-\lambda_i)$$

は 0 でないので、V は正則行列となる。従って $a_1v_1=\cdots=a_kv_k=0$ となり、$v_1,\dots,v_k$ は 0 ではないので、$a_1=\cdots=a_k=0$ を得る。従って $v_1,\dots,v_k$ は一次独立である。 □

系 8.15. A を n-次正方行列とする。A の固有方程式に重根がなければ、A は対角化可能である。

固有多項式に重根がある場合は対角化できる場合とできない場合がある。そういう場合は対角化できるかどうかを定理 8.11 にたちもどって検証しなくてはならない。実際に対角できる場合とできない場合があるが、たとえば次の例は対角化できる。

例 8.16. 行列 $\begin{pmatrix}5 & -2 & 2\\ 8 & -3 & 4\\ -4 & 2 & -1\end{pmatrix}$ は対角化できるかどうか確かめ、できれば対角してみよう。

まず固有方程式は $\det(tI_3-A)=t^3-t^2-t+1=(t-1)^2(t+1)$ なので $t=1,-1$ が固有値で 1 は重根となる。ここで $\mathrm{Ker}(B-1\cdot I_3)=\mathrm{Ker}(\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 8 & -4 & 4\\ -4 & 2 & -2\end{pmatrix})$ は $v_1=\ {}^t(0,1,1), v_2=\ {}^t(1,2,0)$ が基底となり、二つのとも固有値が 1 の固有ベクトルとなる。また -1 に対する固有ベクトルとして、$v_3=\ {}^t(-1,-2,1)$ がとれる。したがって、固有値からなる $\mathbf{C}^3$ の基底 v_1,v_2,v_3 がとれるので、$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ ととれば、$P^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ なので

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

となり対角化できる。

8.3. 行列の対角化の応用. 応用１：行列の n 乗 A が対角化可能であるとする。

$$A = PDP^{-1}, \quad D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

とすると行列 A の n 乗は次の様に求められる。

$$\begin{aligned} A^n =& \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1})\cdots(PDP^{-1})}_{n\text{ 回}} \\ =& PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D\cdots(P^{-1}P)DP^{-1} \\ =& PD^nP^{-1} \end{aligned}$$

例 8.17. 例 *8.12* の A に対して A^n を求めよう。対角は式 *(8.1)* で与えられるので、

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n + 2(-2)^n - 2 & -2^n + 1 & -2 + 2(-2)^n \\ -2 + 2(-2)^n & 1 & -2 + 2(-2)^n \\ -2^n - (-2)^n + 2 & 2^n - 1 & 2 - (-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

応用２：数列 $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n, \{b_n\}_n$ で連立の漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} &= -4a_n - b_n - 6c_n \\ b_{n+1} &= -6a_n + b_n - 6c_n \\ c_{n+1} &= 2a_n + b_n + 4c_n \end{cases}$$

を満たし、$a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 1$ となるものをもとめよ。上の漸化式は $v_n = {}^t(a_n, b_n, c_n)$ とおくと、例 8.12 の行列 A を用いて

$$v_{n+1} = Av_n$$

と表すことができる。従って、例 8.17 の結果を用いて

$$\begin{aligned} v_n =& Av_{n-1} = \cdots = A^{n-1}v_1 = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 2^n + 2(-2)^n - 2 & -2^n + 1 & -2 + 2(-2)^n \\ -2 + 2(-2)^n & 1 & -2 + 2(-2)^n \\ -2^n - (-2)^n + 2 & 2^n - 1 & 2 - (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} -2^n + 4(-2)^n - 2 \\ -2 + 4(-2)^n \\ 2^n - 2(-2)^n + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。したがって、$a_n = -2^n + 4(-2)^n - 2,\ b_n = -2 + 4(-2)^n,\ c_n = 2^n - 2(-2)^n + 2$ となる。

応用３：$b_1, \dots, b_n$ を複素数とする。このとき $n+1$ 項間の線形漸化式

$$a_{k+n} + b_1 a_{k+n-1} + b_2 a_{k+n-2} + \cdots b_n a_k = 0$$

を満たす数列 $\{a_m\}_m$ の一般項を求める問題を行列の n 乗を用いて解く。まず $v_k = {}^t(a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1})$ なるベクトルを考えると、上の漸化式は行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & & \ldots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & \ldots & -b_2 & -b_1 \end{pmatrix}$$

を用いて $v_{k+1} = Av_k$ と書き直すことができる。これまでの方法をもちいて固有方程式を用いて固有値と固有ベクトルをもとめることはできるが、

$$x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots b_n = 0$$

が異なる複素数解 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を持つ時は直接固有値、固有ベクトルがもとめられる。まずべくとる $v_i = {}^t(1, \alpha_i, \alpha_i^2, \ldots, \alpha_i^{n-1})$ とおくと、

$$Av_i = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i^2 \\ \vdots \\ \alpha_i^{n-1} \\ -b_n - b_{n-1}\alpha_i - \cdots - b_1\alpha_i^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i^2 \\ \vdots \\ \alpha_i^{n-1} \\ \alpha_i^n \end{pmatrix} = \alpha_i v_i$$

となり、n 個の固有値 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ をもち、v_i は固有値 α_i に属する固有ベクトルとなる。従って、$P = (v_1, \ldots, v_n)$ とおけば、

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} P^{-1}, \quad A^k = P \begin{pmatrix} \alpha_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \alpha_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

となる。数列の初めの n 項 $a_0, \ldots, a_{n-1}$ が与えられると一般項 a_k が求められる。まず、P^{-1} は存在するので、

$$P^{-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

によって $c_1, \ldots, c_n$ を定めれば、一般項は $a_k = c_1\alpha_1^k + c_2\alpha_2^k + \cdots + c_n\alpha_n^k$ と求められる。これは

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

なる $c_1, \ldots, c_n$ に関する連立方程式を解けばよいことになる。これは書き換えれば、

$$c_1\alpha_1^p + c_2\alpha_2^p + \cdots + c_n\alpha_n^p = a_p \quad (p = 0, \ldots, n-1)$$

という方程式を解けばよいことになる。

8.4. 行列の三角化.

8.4.1. 行列の三角化. ここでは複素数をスカラーとする。

定理 8.18. A を $n\times n$ 行列とする。このときある正則行列 P と上半三角行列 T が存在して、$A=PTP^{-1}$ と書ける。さらに T の対角成分は A の固有値を重複度を込めて考えたもの。

証明. v_1 を固有ベクトルとする。元を補って $v_1,v_2\dots,v_n$ が $\mathbf{C}^n$ の基底となるようにする。このとき $Av_2,\dots,Av_n$ を $v_1,\dots,v_n$ の一次結合で書き表されるので $P=(v_1,\dots,v_n)$ とおけば、

$$A_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & B\\ 0 & C\end{pmatrix} \tag{8.2}$$

なる形の A_1 を用いて、$AP=PA_1$ すなわち $A=PA_1P^{-1}$ が成り立つようにできる。ここで C に対して帰納法の仮定をもちいれば、$(n-1)\times(n-1)$ の正則行列 Q と上半三角行列 T' を用いて $C=QT'Q^{-1}$ 書ける。従って

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & B\\ 0 & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\lambda_1 & BQ\\ 0 & Q^{-1}CQ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & BQ\\ 0 & T'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

従って $P'=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & BQ\\ 0 & T'\end{pmatrix}$ とおけば、P' は正則行列、T は上半三角行列であり、$A=P'TP'^{-1}$ となる。したがって n の場合も成り立つので帰納法によりすべての自然数について定理が証明される。 □

8.4.2. ケーリー・ハミルトンの公式.

定義 8.19 (行列の多項式)**.** $f(x)=a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0$ を複素係数多項式とする。さらに A を $(n\times n)$ 行列とする。このとき $(n\times n)$ 行列 $f(A)$ を

$$f(A)=a_kX^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots a_1A+a_0I_n$$

と定義する。

命題 8.20.
(1) $f(x)$ を多項式、A を $(n\times n)$ 行列、P を $(n\times n)$ 正則行列とする。このとき

$$f(PAP^{-1})=Pf(A)P^{-1}$$

(2) A,B,C を $(n\times n),(n\times m),(m\times m)$ 行列、$f(x)$ を多項式とする。このとき B' が存在して、

$$f(\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}f(A) & B'\\ 0 & f(C)\end{pmatrix}$$

となる。

証明. $f(x)=x^p$ $(p=0,1,2,\dots)$ という形の時に成り立つことは容易にわかる。それらの複素係数一次結合をとることにより、上の命題はわかる。 □

定理 8.21 (ケーリ・ハミルトンの定理). $\Phi_A(x)$ を A の固有多項式とする。このとき

$$\Phi_A(A) = 0$$

が成り立つ。

証明. 帰納法で示す。(8.2) の形の固有多項式を求めると、$\Phi_{A_1}(x) = (x - \lambda_1)\Phi_C(x)$ となる。また固有多項式は正則行列による共役によっても変わらないので、$\Phi_{A_1}(x) = \Phi_A(x)$ が成り立つ。帰納法の仮定から、

$$\begin{aligned}\Phi_C(A_1) &= \begin{pmatrix}\Phi_C(\lambda_1) & B' \\ 0 & \Phi_C(C)\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\Phi_C(\lambda_1) & B' \\ 0 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\Phi_A(A_1) =& (A_1 - \lambda_1 I_n)\Phi_C(A_1) \\ =& \begin{pmatrix}0 & B \\ 0 & C - \lambda_1 I_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Phi_C(\lambda_1) & B' \\ 0 & 0\end{pmatrix} = 0\end{aligned}$$

従って $\Phi_A(A) = P\Phi_A(A_1)P^{-1} = 0$ □