10. 対称行列、２次形式の主軸化

この章では対称行列、エルミート行列が直交行列、あるいはユニタリ行列により対角化できることをいう。対称行列、あるいは直交行列による対称行列の対角化のことを対称行列の主軸化という。さらにこれを、多変数の斉次２次式、つまり、２次形式の直交変換について応用する。

10.1. 直和、直交直和.

定義 10.1. (1) （直和）V をベクトル空間、W_1, W_2 をその部分空間とする。V の任意の元 v が $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ を用いて $v = w_1 + w_2$ の形にただ一通りに書けるとき、V は W_1 と W_2 の直和であるといい、このとき $V = W_1 \oplus W_2$ と書く。
(2) （直交直和）さらに V が内積空間であるとき、$V = W_1 \oplus W_2$ であって $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ に対して w_1 と w_2 が直交しているとき W は W_1 と W_2 の直交直和であるといい、$V = W_1 \perp W_2$ と書く。

命題 10.2. V を内積空間として、W をその部分空間とする。

$$W^{\perp} = \{u \in V \mid \text{ 任意の } w \in W \text{ に対して } (u, w) = 0\}$$

とおくと V は W と $W^{\perp}$ の直交直和になる。

証明. $\{v_1, \ldots . v_k\}$ を W の基底として、さらに元 $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ を補って V の基底となるようにとる。これに対してシュミットの直交化法を用いて $\{w_1, \ldots, w_k\} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ であるように正規直交基底 $\{w_1, \ldots, w_n\}$ をとることができる。このとき $\{w_{k+1}, \ldots, w_n\} = W^{\perp}$ となることは次のようにしてわかる。いま $v = a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n$ なる元が W と直交しているとすると、$(w_1, v) = \cdots = (w_k, v) = 0$ なので、$(w_1, v) = a_1, \ldots, (w_k, v_) = a_k$ を用いれば、$a_1 = \cdots = a_k = 0$ がわかる。したがって $v \in \langle w_{k+1}, \ldots, w_n \rangle$ となることがわかる。したがって W と $W^{\perp}$ は直交直和である。 □

定義 10.3. $W^{\perp}$ を W の直交補空間という。

10.2. 対称行列, エルミート行列と固有値.

実対称行列とエルミート行列の固有値が実数であること、および異なる固有値に対する固有ベクトルは直交することを示す。

定義 10.4. (1) $n \times n$ 複素正方行列 H がエルミート行列であるとは

$$H^* = H$$

となることである。$H = (h_{ij})$ と成分表示すれば、これは $h_{ij} = \overline{h_{ij}}$ という条件と同値になる。
(2) エルミート行列 S が実行列であるとき、対称行列であるという。$S = (s_{ij})$ とすれば $s_{ij} = s_{ji}$ であることと同値である。

命題 10.5. H をエルミート行列とするとその固有値は全て実数である。

証明. 実際 $Hv = \lambda v$ とすると、$(Hv, v) = (\lambda v, v) = \overline{\lambda}(v, v)$ と $(Hv, v) = (v, H^* v) = (v, Hv) = (v, \lambda v) = \lambda(v, v)$ で $(v, v) \neq 0$ より命題を得る。 □

10.3. 直交行列、ユニタリ行列による対角化.

命題 10.6. $V=\mathbf{C}^n$ を標準エルミート内積空間とする。H をエルミート行列とする。$W\subset V$ を V の部分空間として、H で安定であるとする。すなわち

$$w\in W \text{ ならば } Hw\in W$$

とする。このとき $W^{\perp}$ は H で安定である。

証明. $u\in W^{\perp}$ とする。Hu が $W^{\perp}$ を確かめよう。$w\in W$ に対して $(Hu,w)=(u,H^*w)=(u,Hw)$ だが、命題の仮定より、$Hw\in W$ なので $(u,Hw)=0$. 従って $Hu\in W^{\perp}$ となる。これで $W^{\perp}$ が H で安定であることが示された。 □

命題 10.7. H を n 次エルミート行列とする。このとき固有ベクトルからなる正規直交基底がとれる。

証明. $k\leq n$ に対して固有ベクトルからなる正規直交系 $\{w_1,\ldots,w_k\}$ が取れることを k に関する帰納法で示す。固有ベクトル w_k で長さが 1 のものを取れば $k=1$ のときに成り立つのは明らかである。$k<n$ のとき $\{w_1,\ldots,w_k\}$ が固有ベクトルからなる正規直交系であるとすると、$W=\langle w_1,\ldots,w_k\rangle$ は H で安定である。従って $W^{\perp}$ も安定である。H を $W^{\perp}$ から $W^{\perp}$ への線形写像とみて、その固有ベクトル w_{k+1} で長さが 1 であるものをとれば $\langle w_1,\ldots,w_k,w_{k+1}\rangle$ は正規直交系である。 □

定理 8.11 を用いれば、エルミート行列、あるいは対称行列は固有値からなる基底がとれるので対角化可能である。より詳しく、次の定理が成り立つ。

定理 10.8.

(1) H をユニタリ行列とする。

$$H=U^{-1}DU=U^*DU$$

と書ける。ここで D は実対角行列、U はユニタリ行列 $(U^*U=I_n)$ である。

(2) S を対称行列とする。

$$S=P^{-1}DP={}^tPDP$$

と書ける。ここでここで D は実対角行列、P は直交行列 $({}^tPP=I_n)$ である。

証明. $\mathbf{C}^n$ の場合を考える。$v_1,\ldots,v_n$ を固有ベクトルからなる $\mathbf{C}^n$ の正規直交基底で、$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ をその固有値とすると、λ_i は実数となる。したがって、$U=(v_1,\ldots,v_n)$ とおくとこれは、命題 9.19 よりユニタリ行列となり、$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \ldots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ldots & \lambda_n\end{pmatrix}$ とおけば、$HU=DU$ となる。後半は U がユニタリ行列であることから $U^{-1}=U^*$ を用いればよい。

対称行列のときも同様にして示すことができる。 □

10.4. **2 次形式の主軸化.**

定義 10.9. (1) 斉次 2 次の実数係数多項式

$$q(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{1\le i<j\le n}^{n}2a_{ij}x_ix_j$$

を 2 次形式という。

(2) $i>j$ に対しても $a_{ji}=a_{ij}$ とおけば、ここで $S=(a_{ij})_{ij}$ は対称行列となる。この S を用いれば、ベクトル $\mathbf{x}={}^t(x_1,\ldots,x_n)$ として、$q(x_1,\ldots,x_n)={}^t\mathbf{x}S\mathbf{x}$ と書ける。このとき $q(x_1,\ldots,x_n)$ を対称行列 S に対応する 2 次形式といい、S を 2 次形式 $q(x_1,\ldots,x_n)$ に対応する対称行列という。

命題 10.10. (1) 変数 $(x_1,\ldots,x_n)$ を関係式 $P\mathbf{y}=\mathbf{x}$ で定まる変数 $(y_1,\ldots,y_n)$ に変数変換すると、S であらわされる 2 次形式 $q(x_1,\ldots,x_n)$ は $S'={}^tPSP$ であらわされる 2 次形式 $q'(y_1,\ldots,y_n)$ に変換される。ここで $\mathbf{x}={}^t(x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{y}={}^t(y_1,\ldots,y_n)$ である。

(2) 直交行列 P で $P\mathbf{y}=\mathbf{x}$ と変数変換をすることにより、

$$q'(y_1,\ldots,y_n)=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2 \tag{10.1}$$

と書ける。

証明. (1) $q(x_1,\ldots,x_n)={}^t\mathbf{x}S\mathbf{x}$ なので命題の関係式を用いて $y_1,\ldots,y_n$ に変数変換すると、$q'(y_1,\ldots,y_n)={}^t(P\mathbf{y})S(P\mathbf{y})={}^t\mathbf{y}\,{}^tPSP\mathbf{y}$ となるのでこれは ${}^tPSP$ に対応する 2 次形式となる。

(2) S は対称行列なので、直交行列により実対角化される。つまり直交行列 P と実対称行列 D が存在して ${}^tPSP=P^{-1}SP=D$ となる。従って、

$$\begin{aligned}q(x_1,\ldots,x_n)&={}^t\mathbf{x}S\mathbf{x}={}^t(P\mathbf{y})S(P\mathbf{y})={}^t\mathbf{y}({}^tPSP)\mathbf{y}\\&={}^t\mathbf{y}D\mathbf{y}=q'(y_1,\ldots,y_n)\end{aligned}$$

ここで対角行列 D の対角成分を $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ とすると、$q'(y_1,\ldots,y_n)=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$ となる。 □

直交行列による変数変換を直交変換という。また (10.1) の形の 2 次形式を対角的な 2 次形式という。直交変換により 2 次形式は対角化することができる。これを 2 次形式の主軸変換という。

10.5. **二次形式の符号とシルベスターの慣性法則.** 二次形式の主軸化を行うと、(10.1) の形に現れる $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ は対応する対称行列の固有値となることを前の章で観察した。しかし直交行列とは限らない実正則行列 P を用いて $P\mathbf{y}=\mathbf{x}$ という関係式で変数変換して、$q(x_1,\ldots,x_n)={}^t\mathbf{x}S\mathbf{x}$ が (10.1) の形になったとしても、その係数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ は固有値であるとは限らない。しかし次の定理に示すように、係数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ のうちの正であるものの個数、負のものの個数はどのような実正則行列による変数変換をしても変わらない。

定理 10.11. P, Q を実正則行列とする。$q(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, $\mathbf{x} = Q\mathbf{z}$ によってそれぞれ変数変換した時に

$$q'(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_p y_p^2 - \lambda_{p+1} y_{p+1}^2 - \cdots - \lambda_{p+q} y_{p+q}^2$$
$$q'(z_1, \ldots, z_n) = \mu_1 z_1^2 + \cdots + \mu_r z_r^2 - \mu_{r+1} z_{r+1}^2 - \cdots - \mu_{r+s} z_{r+s}^2$$

と変換されて、$1 \leq i \leq p+q$ について $\lambda_i > 0$, $1 \leq j \leq r+s$ について $\mu_j > 0$ となったとすると、$p = r, q = s$ となる。

証明. べくとる $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ に対して $q(x_1, \ldots, x_n) = q(\mathbf{x})$ と書く。$\mathbf{e}_i$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底として

$$V_{>0} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p \rangle, \quad V_{\leq 0} = \langle \mathbf{e}_{p+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$$
$$W_{>0} = \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r \rangle, \quad W_{\leq 0} = \langle \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n \rangle$$

とおく。$\mathbf{a} \in V_{>0} - \{0\}$, $\mathbf{b} \in W_{\leq 0}$ に対して、$q(P\mathbf{a}) = q'(\mathbf{a}) > 0$、$q(Q\mathbf{b}) = q''(\mathbf{b}) \leq 0$ となるので、$PV_{>0} \cap QW_{\leq 0} = \{0\}$ となる。また P, Q は正則行列なので、

$$\dim(PV_{>0}) + dim(QW_{\leq 0}) = p + (n - r) \leq n$$

とり $p \leq r$ となる。$V_{>0}, W_{\leq 0}$ を $W_{>0}, V_{\leq 0}$ に置き換えて同じ議論をすれば、$r \leq p$ となるので $p = r$ となる。また符号を反対にして同様の議論をすることにより $r = s$ も得られる。 □