次元の一意性と基底の存在

Proposition 0.1. V をベクトル空間とする。

(1) （置き換え定理）$v_1, \dots, v_n$ を V の元、r を実数とする。このとき $v_1, \dots, v_n$ が一次独立であることと、$v_1, v_2 + rv_1, v_3, , \dots, v_n$ が一次独立であることは同値である。

(2) V の元 $v_1, \dots, v_n$ で生成される V の部分空間 $W = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ から $(n+1)$ 個の元 $w_1, \dots, w_{n+1}$ をとると一次従属である。

Proof. (1) $v_1, \dots, v_n$ を一次独立として、$v_1, v_2 + rv_1, v_3, , \dots, v_n$ が一次独立を示す。$a_1 v_1 + a_2(v_2 + rv_1) + a_3 v_3 + \cdots a_n v_n = 0$ とする。これを変形して

$$
\begin{aligned}
0 &= a_1 v_1 + a_2(v_2 + rv_1) + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n \\
&= (a_1 + r) v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \cdots + a_n v_n
\end{aligned}
$$

となるが、$v_1, \dots, v_n$ の一次独立性をより、$a_2 = \cdots = a_n = 0$ であり、$a_1 + ra_2 = 0$ から $a_1 = 0$ もいえる。また逆に $v_1, v_2' = v_2 + rv_1, v_3, , \dots, v_n$ が一次独立であれば、$v_2 = v_2' - rv_1$ なので $v_1, \dots, v_n$ の一次独立性が言える。

(2) n による帰納法と背理法で示す。$n = 1$ の時は容易。$w_1, \dots, w_{n+1}$ が一次独立であるとする。$w_1 = 0$ であれば、一次従属なので、$w_1 \neq 0$ であるとしてよい。w_1 を $v_1, \dots, v_n$ 一次結合で表したときの係数のうちのどれかは 0 でないので、簡単のためそれを v_1 として、$w_1 = a_1 v_1 + u_1$ と書く。ここで $a_1 \neq 0$, $u_1 \in \langle v_2, \dots, v_n \rangle$。さて $w_2 = a_2 v_1 + u_2$, $u_2 \in \langle v_2, \dots, v_n \rangle$ と表せば、

$$
w_2' = w_2 - \frac{a_2}{a_1} w_1 = (a_2 v_1 + u_2) - \frac{a_2}{a_1}(a_1 v_1 + u_1) = u_2 - \frac{a_2}{a_1} u_1 \in \langle v_2, \dots, v_n \rangle
$$

とおくと、(1) より、$w_1, w_2', w_3 \dots, w_{n+1}$ は一次独立。この操作を $w_3, \dots, w_{n+1}$ について同様に行えば、$w_3', \dots, w_{n+1}' \in \langle v_2, \dots, v_n \rangle$ で $w_1, w_2', \dots, w_{n+1}'$ は一次独立となる。とくに $w_2', \dots, w_{n+1}' \in \langle v_2, \dots, v_n \rangle$ も一次独立となる。これは帰納法の仮定に反する。 □

Theorem 0.2. W を $\mathbf{R}^n$ の部分空間とする。

(1) W の基底の個数はその取り方によらない。

(2) W には基底が存在する

Proof. (1) $w_1, \dots, w_p$、$v_1, \dots, v_q$ ともに W の基底とする。$w_1, \dots, w_p$ は W の生成系で $v_1, \dots, v_q$ は一次独立なので、Proposition 0.1 より $q \leq p$. 逆もいえるので $p = q$.

(2) $\mathbf{R}^n$ は n 個の元で生成されるので W で一次独立な元の個数は n 個以下なので、一次独立なものの個数の最大値を与えるものを $v_1, \dots, v_p$ とする。$w \in W$ をとれば $v_1, \dots, v_p, w$ は一次従属なので $a_1 v_1 + \cdots + a_p v_p + bw = 0$ なる非自明な関係式がある。$b = 0$ ならば $v_1, \dots, v_p$ の一次独立性に反するので上の関係式を b で割ることにより w が $v_1, \dots, v_p$ の一次結合であらわされることがわかる。したがって $v_1, \dots, v_p$ は生成系でもあり、したがって基底となる。 □