平行体の体積

寺杣友秀

最終訂正日 2017/06/30

1. n 次元空間内の有界集合の体積

D を $\mathbf{R}^n$ の有界部分集合とする。

$$D \subset I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

となる実数 $a_1, \dots, a_n, b_1 \cdots b_n$ をとる。$m > 1$ として I の分割 α とは、

$$\begin{aligned}
&a_1 = \alpha_1^{(1)} < \alpha_2^{(1)} < \cdots < \alpha_m^{(1)} = b_1, \\
&a_2 = \alpha_1^{(2)} < \alpha_2^{(2)} < \cdots < \alpha_m^{(2)} = b_2 \\
&\cdots \\
&a_n = \alpha_1^{(n)} < \alpha_2^{(n)} < \cdots < \alpha_m^{(n)} = b_n
\end{aligned}$$

となる実数の組 $(a_i^{(j)})_{ij}$ のこととする。$1 \leq i_1, \dots, i_n \leq m-1$ に対して小区間 $\Delta_{i_1,\dots,i_n}$ を

$$\Delta_{i_1,\dots,i_n} = [\alpha_{i_1}^{(1)}, \alpha_{i_1+1}^{(1)}] \times [\alpha_{i_2}^{(2)}, \alpha_{i_2+1}^{(2)}] \times \cdots \times [\alpha_{i_n}^{(n)}, \alpha_{i_n+1}^{(n)}]$$

と定義し、

$$\mathrm{vol}(\Delta_{i_1,\dots,i_n}) = (\alpha_{i_1+1}^{(1)} - \alpha_{i_1}^{(1)}) \times (\alpha_{i_2+1}^{(2)} - \alpha_{i_2}^{(2)}) \times \cdots \times (\alpha_{i_n+1}^{(n)} - \alpha_{i_n}^{(n)})$$

と定義する。これは後の述べる $\Delta_{i_1,\dots,i_n}$ と一致する。この分割 α に対して、$\overline{V}(D, \alpha)$, $\underline{V}(D, \alpha)$ を

$$\overline{V}(D, \alpha) = \sum_{\Delta_{i_1,\dots,i_n} \cap D \neq \emptyset} \mathrm{vol}(\Delta_{i_1,\dots,i_n})$$

$$\underline{V}(D, \alpha) = \sum_{\Delta_{i_1,\dots,i_n} \subset D} \mathrm{vol}(\Delta_{i_1,\dots,i_n})$$

とする。α に対して

$$0 \leq \underline{S}(D, \alpha) \leq \overline{S}(D, \alpha) \leq \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

となる。m および α を動かした時にできる有界集合 $\{\overline{V}(D, \alpha)\}_{m,\alpha}$, $\{\underline{V}(D, \alpha)\}_{m,\alpha}$ の下限、上限をそれぞれ上体積 $\overline{V}(D)$、下体積 $\underline{V}(D)$ と定める。これらは D に対して一意的に定まる。容易に $\underline{V}(D) \leq \overline{V}(D)$ となることがわかる。

定義 1.1. D を有界集合としたとき $\overline{V}(D) = \underline{V}(D)$ となるとき、D は体積確定といい、この共通の値を $V(D)$ と書く。

上体積、下体積の定義から次のことは容易にわかる。

補題 1.2. D, E を有界集合とし、とする。

(1) $\overline{V}(D)$, $\underline{V}(D)$ は $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ の取り方によらない。
(2) $D \subset E$ であれば、$\overline{V}(D) \leq \overline{V}(E)$, $\underline{V}(D) \leq \underline{V}(E)$ となる。
(3) $D \subset E$ であれば、$\overline{V}(E) - \underline{V}(D) \leq \overline{V}(E - D)$ となる。
(4) $\overline{V}(D \cup E) \leq \overline{V}(D) + \overline{V}(E)$
(5) $D \cap E = \emptyset$ であれば $\underline{V}(D) + \underline{V}(E) \leq \underline{V}(D \cup E)$
(6) $v \in \mathbf{R}^n$ として $D + v = \{x + v \mid x \in D\}$ とおき、これを D の平行移動像という。このとき $\overline{V}(D + v) = \overline{V}(D)$, $\underline{V}(D + v) = \underline{V}(D)$ となる。

証明. (3) $\Delta_{i_1,\dots,i_n} \cap E \neq \emptyset$ であって、$\Delta_{i_1,\dots,i_n} \not\subset D$ であれば、$\Delta_{i_1,\dots,i_n} \cap (E - D) \neq \emptyset$ であることからわかる。
(4)$\Delta_{i_1,\dots,i_n} \cap (D \cup E) \neq \emptyset$ とすると、$\Delta_{i_1,\dots,i_n} \cap D \neq \emptyset$ または $\Delta_{i_1,\dots,i_n} \cap D \neq \emptyset$ であることがわかる。
(5) $\Delta_{i_1,\dots,i_n} \subset D$ かつ $\Delta_{i_1,\dots,i_n} \subset E$ は両立することなく、いずれの場合も $\Delta_{i_1,\dots,i_n} \subset D \cup E$ となることからわかる。 □

2. 平行体の体積

定義 2.1. $v_1, \dots, v_n$ をベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の元とする。$\mathbf{R}^n$ の部分集合 $P(v_1, \dots, v_n)$

$$P(v_1, \dots, v_n) = \{t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \mid t_i \in [0, 1]\}$$

を平行体という。さらに

$$p^+(v_1, \dots, v_n) = \overline{V}(P(v_1, \dots, v_n))$$
$$p^-(v_1, \dots, v_n) = \underline{V}(P(v_1, \dots, v_n))$$

とおく。

補題 1.2(2) より $p^-(v_1, \dots, v_n) \leq p^+(v_1, \dots, v_n)$ となる。

定理 2.2.

以上の設定で、

$$p^+(v_1, \dots, v_n) = p^-(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

である。とくに $P(v_1, \dots, v_n)$ は体積確定で

$$V(P(v_1, \dots, v_n)) = |\det(v_1, \dots, v_n)|$$

となる。

証明.
Step 1 $p^+(v_1, \dots, v_n), p^-(v_1, \dots, v_n)$ は $v_1, \dots, v_n$ の入れ替えで変わらない。これは $P(v_1, \dots, v_n)$ が $v_1, \dots, v_n$ の入れ替えで変わらないことから容易にわかる。
Step 2 H を $\mathbf{R}^n$ の線形部分空間で $\dim(H) = m$, $m < n$ として、D を H の有界部分集合とする。このとき $\overline{V}(D) = 0$ である。特に $v_1, \dots, v_n$ が一次従属であれば $p^+(v_1, \dots, v_n) = p^-(v_1, \dots, v_n) = 0$ である。また超平面（$(n-1)$ 次元の線型部分空間の平行移動像として得られるもの）内の有界集合の有限個の合併 D に対して $\overline{V}(D) = 0$ である。

証明. 条件よりある $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_m \le n$ が存在して $x_{k_1}, \ldots, x_{k_m}$ 方向への射影 π を考えると、π によって H と $\mathbf{R}^m$ が同型になる。ここで簡単のため $x_1, \ldots, x_m$ への射影が同型となっているとする。このとき H 内の有界領域 D は $\mathbf{R}^m$ 内の有界領域に移されるので、十分大きな M で $\pi^{-1}(D) \subset [-M, M]^m$ となるものが存在する。従って $E = [-M, M]^m$ として $\pi^{-1}(E)$ に対して $\overline{V}(\pi^{-1}(E)) = 0$ を示せば十分である。E は有界なので十分大きな L をとれば、$\pi^{-1}(E) \subset [-M, M]^n \times [-L, L]^{n-m}$ となる。N を 0 より大きい整数として E を下のように小区間に分割する。

$$E = \bigcup_{-N \le i_p \le N-1} \left([0, M/N]^m + (\frac{i_1 M}{N}, \ldots, \frac{i_n M}{N}) \right)$$

このとき

$$\pi^{-1}(E) = \bigcup_{-N \le i_p \le N-1} \Bigg(\left([0, M/N]^m \times [0, L/N]^{n-m} \right) + \pi^{-1}(\frac{i_1 M}{N}, \ldots, \frac{i_n M}{N}) \Bigg)$$

となる。したがって

$$\overline{V}(\pi^{-1}(E)) \le (2N)^m (\frac{M}{N})^m \cdot (\frac{L}{N})^{n-m} = \frac{2^m M^m L^{n-m}}{N^{n-m}}$$

となるが N は任意なので $\overline{V}(\pi^{-1}(E)) = 0$ となる。 □

開平行体 $P^0(v_1, \ldots, v_n)$ を

$$P^0(v_1, \ldots, v_n) = \{ t_1 v_1 + \cdots + t_n v_n \mid t_i \in (0, 1) \}$$

と定め、$P(v_1, \ldots, v_n)$ の境界 $\partial P(v_1, \ldots, v_n)$ を

$$\partial P(v_1, \ldots, v_n) = P(v_1, \ldots, v_n) - P^0(v_1, \ldots, v_n)$$

によって定める。

Step 3 $\underline{V}(P^0(v_1, \ldots, v_n)) = \overline{V}(P(v_1, \ldots, v_n))$ である。とくに $P(v_1, \ldots, v_n)$, $P^0(v_1, \ldots, v_n)$ は体積確定でそれらの体積は等しい。この体積を $p(v_1, \ldots, v_n)$ と書く。

証明.

$$0 \le \overline{V}(P(v_1, \ldots, v_n)) - \underline{V}(P^0(v_1, \ldots, v_n)) \le \overline{V}(\partial P(v_1, \ldots, v_n))$$

であるが $\partial P(v_1, \ldots, v_n)$ が超平面の有界領域の有限個の合併に含まれていることから $\overline{V}(\partial P(v_1, \ldots, v_n)) = 0$ となる。 □

Step 4 N を 1 以上の整数とする。このとき

$$p(Nv_1, v_2 \ldots, v_n) = Np(v_1, v_2 \ldots, v_n)$$

が成り立つ。さらに正の実数 r に対して

$$p(rv_1, v_2 \ldots, v_n) = rp(v_1, v_2 \ldots, v_n)$$

が成り立つ。

証明. $v_1,\dots,v_n$ が一次従属であるときには両辺 0 となり成り立つので $v_1,\dots,v_n$ が一次独立であると仮定する。

$$P(Nv_1,\dots,v_n)=\cup_{i=0}^{N-1}\Big(P(v_1,\dots,v_n)+iv_1\Big)$$

であり、$0\le i<j\le n-1$ であれば

$$\Big(P^0(v_1,\dots,v_n)+iv_1\Big)\cap\Big(P^0(v_1,\dots,v_n)+jv_1\Big)=\emptyset$$

従って補題を使って

$$\begin{aligned}N\underline{V}(P^0(v_1,\dots,v_n)) &\underset{(5)(6)}{\le} \underline{V}(\cup_i(P^0(v_1,\dots,v_n)+iv_i))\\ &\le \underline{V}(\cup_i(P(v_1,\dots,v_n)+iv_i))=\underline{V}(P(Nv_1,\dots,v_n))\\ &\underset{(4)(6)}{\le} N\underline{V}(P(v_1,\dots,v_n))\end{aligned}$$

この不等式に Step 3 の結果を合わせて Step 4 の初めの命題が言える。二つ目の命題で k が有理数の時は初めの命題を繰り返し用いて示されるが、一般の場合は $r_1<r<r_2$ をみたす有理数 r_1,r_2 をとると

$$P(k_1v_1,\dots,v_n)\subset P(kv_1,\dots,v_n)\subset P(k_2v_1,\dots,v_n)$$

なので

$$p(k_1v_1,\dots,v_n)<p(kv_1,\dots,v_n)<p(k_2v_1,\dots,v_n)$$

であるが、

$$\begin{aligned}p(k_1v_1,\dots,v_n)&=k_1p(v_1,\dots,v_n)<kp(v_1,\dots,v_n)\\ &<k_2p(v_1,\dots,v_n)=p(k_2v_1,\dots,v_n)\end{aligned}$$

となるので実数に対する二つ目の命題がいえる。 □

Step 5 実数 k に対して

$$p(v_1,v_2\dots,v_n)=p(v_1+kv_2,v_2\dots,v_n)$$

が成り立つ。

証明. $v_1,\dots,v_n$ が一次従属であるときには両辺 0 となり成り立つので $v_1,\dots,v_n$ が一次独立であると仮定する。N を 1 以上の整数とする。

$$\begin{aligned}&P(\frac{v_1}{N},v_2-\frac{k}{N}v_2,\dots,v_n)+\frac{k}{N}v_2\\ &\subset P(\frac{v_1+kv_2}{N},v_2,\dots,v_n)\subset P(\frac{v_1}{N},v_2+\frac{k}{N}v_2,\dots,v_n)\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}&p(\frac{v_1}{N},v_2-\frac{k}{N}v_2,\dots,v_n)\\ &\le p(\frac{v_1+kv_2}{N},v_2\dots,v_n)\le p(\frac{v_1}{N},v_2+\frac{k}{N}v_2\dots,v_n)\end{aligned}$$

他方 Step 4 と変数の入れ替えを用いて、

$$
\begin{aligned}
Np(\frac{v_1}{N}, v_2 - \frac{k}{N}v_2 \dots, v_n) &= (1 - \frac{k}{N})p(v_1, v_2, \dots, v_n) \\
Np(\frac{v_1 + kv_2}{N}, v_2, \dots, v_n) &= p(v_1 + kv_2, v_2 \dots, v_n) \\
Np(\frac{v_1}{N}, v_2 + \frac{k}{N}v_2, \dots, v_n) &= (1 + \frac{k}{N})p(v_1, v_2, \dots, v_n)
\end{aligned}
$$

なので

$$
(1 - \frac{k}{N})p(v_1, v_2, \dots, v_n) \leq p(v_1 + kv_2, v_2 \dots, v_n) \leq (1 + \frac{k}{N})p(v_1, v_2, \dots, v_n)
$$

となる。ここで N は任意だったので、

$$
p(v_1, v_2, \dots, v_n) = p(v_1 + kv_2, v_2 \dots, v_n)
$$

を得る。 □

Step 6

$$
p(v_1, \dots, v_n) = |\det(v_1, \dots, v_n)| \tag{2.1}
$$

証明. $v_1, \dots, v_n$ を一次独立と仮定してかまわない。

$$
v_i = (v_{1i}, \cdots, v_{ni})
$$

とおくと $p(v_1, v_2 \dots, v_n) = p(v_1 + kv_2, v_2 \dots, v_n)$ であることと、$|\det(v_1, v_2 \dots, v_n)| = |\det(v_1 + kv_2, v_2, \dots, v_n)$ であることを考えれば Step 6 の命題が $(v_1, \dots, v_n)$ に関して成り立つことと $(v_1 + kv_2, v_2, \dots, v_n)$ について成り立つことは同値である。$v_1, \dots, v_n$ の順番を入れ替えても (2.1) の式の両辺は変化ないので、適宜順番を入れ替えて証明をすればよい。ここで行列

$$
(v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}
$$

の行列式が 0 でないことを用いれば、第一行 $(v_{11}, \dots, v_{1n})$ のどれかは 0 でない。従って $v_1, \dots, v_n$ の順番を入れ替えて $v_{11} \neq 0$ であるとして構わない。このとき v_1 の何倍かを $v_2, v_3, \dots$ に加えることにより、

$$
(v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ v_{11} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}
$$

の場合に Step 6 が示されればよい。ここで $(v_{22}, \dots, v_{2n})$ のどれかは 0 でないことを用いてさらに順番を入れ替えて $v_{22} \neq 0$ であるとして構わない。以下同様にして

$$
(v_1, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} v_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}
$$

の場合に示せばよく、これは区間を表すので Step 6 は成立する。 □

□